

21.18

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \overset{\substack{f(0)=3\alpha-1 \\ f(1)=5\alpha-1}}{\Rightarrow} f'(\xi_1) = 5\alpha - 1 - 3\alpha + 1 \Rightarrow f'(\xi_1) = 2\alpha \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (1,2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \overset{\substack{f(1)=5\alpha-1 \\ f(2)=7\alpha-1}}{\Rightarrow} f'(\xi_2) = 7\alpha - 1 - 5\alpha + 1 \Rightarrow f'(\xi_2) = 2\alpha \quad (2)$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ

$$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 2\alpha \\ f'(\xi_2) = 2\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$