

21.17

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 4]$ αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, 4)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (2, 4)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{2} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[4, 6]$ αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(4, 6)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (4, 6)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(4)}{2} \quad (2)$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ

$$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{2} \\ f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(4)}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{οι αριθμοί } f(2), f(4), f(6) \text{ είναι διαδοχικοί όροι} \\ \text{αριθμητικής προόδου} \Rightarrow f(6) - f(4) = f(4) - f(2) \\ \Rightarrow \end{array} \quad f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$