

21.16

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) + x - \alpha - \beta$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha) + \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} - \beta \stackrel{f(\alpha)=\alpha}{=} \alpha - \beta < 0 \\ h(\beta) &= f(\beta) + \cancel{\beta} - \alpha - \cancel{\beta} \stackrel{f(\beta)=\beta}{=} \beta - \alpha > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha)h(\beta) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(\gamma) = 0 \Rightarrow f(\gamma) + \gamma - \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \boxed{f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma}$$

β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, γ)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \stackrel{f(\gamma)=\alpha+\beta-\gamma}{\stackrel{f(\alpha)=\alpha}{\Rightarrow}} f'(\xi_1) = \frac{\cancel{\alpha} + \beta - \gamma - \cancel{\alpha}}{\gamma - \alpha} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \alpha} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (γ, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \stackrel{f(\gamma)=\alpha+\beta-\gamma}{\stackrel{f(\beta)=\beta}{\Rightarrow}} f'(\xi_2) = \frac{\cancel{\beta} - \alpha - \cancel{\beta} + \gamma}{\beta - \gamma} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} \quad (2)$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$

$$\text{τέτοια ώστε } \boxed{f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2)} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} = \boxed{1}$$