

21.15

Μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$ . Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν  $x_1, x_2, x_3 \in (α, β)$ , διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε

$$f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 3 \frac{f(β) - f(α)}{β - α}$$

Θα χωρίσουμε το διάστημα  $[α, β]$  σε τρία ίσου μήκους μέρη. Δηλαδή θα το χωρίσουμε στα διαστήματα

$$\left[ α, α + \frac{β - α}{3} \right]$$

$$\left[ α + \frac{β - α}{3}, α + 2 \frac{β - α}{3} \right]$$

$$\left[ α + 2 \frac{β - α}{3}, α + 3 \frac{β - α}{3} \right]$$

Έτσι έχουμε

Η συνάρτηση  $f$

είναι συνεχής στο διάστημα  $\left[ α, α + \frac{β - α}{3} \right]$ , αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\left( α, α + \frac{β - α}{3} \right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει  $x_1 \in \left( α, α + \frac{β - α}{3} \right)$ , τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f\left(α + \frac{β - α}{3}\right) - f(α)}{\cancel{α} + \frac{β - α}{3} - \cancel{α}} = \frac{f\left(α + \frac{β - α}{3}\right) - f(α)}{\frac{β - α}{3}} = \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση  $f$

είναι συνεχής στο διάστημα  $\left[ α + \frac{β - α}{3}, α + 2 \frac{β - α}{3} \right]$ , αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\left( α + \frac{β - α}{3}, α + 2 \frac{β - α}{3} \right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει  $x_2 \in \left( α + \frac{β - α}{3}, α + 2 \frac{β - α}{3} \right)$ ,

τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f\left(α + 2 \frac{β - α}{3}\right) - f\left(α + \frac{β - α}{3}\right)}{α + 2 \frac{β - α}{3} - \left(α + \frac{β - α}{3}\right)} = \frac{f\left(α + 2 \frac{β - α}{3}\right) - f\left(α + \frac{β - α}{3}\right)}{\cancel{α} + \cancel{2} \frac{β - α}{3} - \cancel{α} - \frac{\cancel{β} - \cancel{α}}{3}} =$$

$$= \frac{f\left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}\right) - f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} \quad (2)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση  $f$

είναι συνεχής στο διάστημα  $\left[\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}, \beta\right]$ , αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}, \beta\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει  $x_3 \in \left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}, \beta\right)$ , τέτοιο ώστε

$$f'(x_3) = \frac{f(\beta) - f\left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}\right)}{\beta - \left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}\right)} = \frac{f(\beta) - f\left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}\right)}{\beta - \alpha - 2\frac{\beta - \alpha}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} \quad (3)$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in \left(\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}\right)$  ένα τουλάχιστον

$x_2 \in \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}, \alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}\right)$  και ένα τουλάχιστον  $x_3 \in \left(\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}, \beta\right)$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} & \boxed{f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3)} \stackrel{(1),(2),(3)}{=} \\ &= \frac{f\left(\cancel{\alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} + \frac{f\left(\cancel{\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}}\right) - f\left(\cancel{\alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} + \frac{f(\beta) - f\left(\cancel{\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} = \\ &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} = \boxed{3 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}} \end{aligned}$$