

21.14

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3} \right]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3} \right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3} \right)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+2\beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+2\beta-3\alpha}{3}} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2\beta-2\alpha}{3}} = \\ &= 3 \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{2(\beta-\alpha)} \quad (1) \end{aligned}$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta \right]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta \right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta \right)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{\alpha+2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{3\beta - \alpha - 2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} = \\ &= 3 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \alpha} \quad (2) \end{aligned}$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3} \right)$ και ένα τουλάχιστον

$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta \right)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \boxed{2f'(\xi_1) + f'(\xi_2)} &\stackrel{(1),(2)}{=} \cancel{2} \cdot 3 \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\cancel{2}(\beta - \alpha)} + 3 \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \alpha} = \\ &= 3 \left[\frac{\cancel{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}}{\beta - \alpha} + \frac{f(\beta) - \cancel{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}}{\beta - \alpha} \right] = 3 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{f(\alpha)=f(\beta)}{=} \boxed{0} \end{aligned}$$

