

21.13

- α) Για να ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα  $[0, 2]$  θα πρέπει η  $f$  να είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$

Έτσι

στο διάστημα  $[0, 1)$  η  $f$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα  $(1, 2]$  η  $f$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική

άρα πρέπει η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$

Επομένως θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha x^2 - \beta) = \alpha \cdot 1^2 - \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 1 + \beta = \alpha \cdot 1^2 - \beta = \alpha - \beta \Rightarrow 4 + \beta = \alpha - \beta \Rightarrow \boxed{\alpha - 2\beta = 4} \quad (1)$$

Ακόμη

στο διάστημα  $(0, 1)$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

στο διάστημα  $(1, 2)$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

άρα πρέπει η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$

Επομένως θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(1) = \alpha - \beta}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 - \beta - \alpha + \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x + \beta - \alpha + \beta}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x + 2\beta - \alpha}{x - 1} \stackrel{\alpha - 2\beta = 4 \Rightarrow 2\beta - \alpha = -4}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha \cancel{(x-1)} (x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 4}{x - 1} \Rightarrow \alpha(1+1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Τέλος

$$(1) \Rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

Με τις τιμές που βρήκαμε παραπάνω η συνάρτηση  $f$  έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 4x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

και εφαρμόζεται για αυτήν το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα  $[0, 2]$

- β) Με τις τιμές που βρήκαμε παραπάνω η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 2]$  με

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & x > 1 \\ 4, & x \leq 1 \end{cases}$$

Οπότε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2} \stackrel{f(2)=9}{f(0)=-1} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{9 - (-1)}{2} \Rightarrow f'(\xi) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{αν } \xi > 1 \Rightarrow 4\xi = 5 \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{5}{4}} \\ \text{αν } \xi \leq 1 \text{ αδύνατη} \end{cases}$$