

21.11 1)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = f(2) - f(1) \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, 3)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \Rightarrow f'(\xi_2) = f(3) - f(2) \quad (2)$$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$f(1) + f(3) = 2f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) = f(2) + f(2) \Rightarrow f(3) - f(2) = f(2) - f(1) \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} f'(\xi_2) = f'(\xi_1)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ άρα προφανώς $\xi \in (1, 3)$

τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

21.11 2)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 4]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, 4)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (2, 4)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(2)}{2} \quad (2)$$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$f(2) = \frac{f(0) + f(4)}{2} \Rightarrow f(0) + f(4) = 2f(2) \Rightarrow f(0) + f(4) = f(2) + f(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(4) - f(2) = f(2) - f(0) \Rightarrow \frac{f(4) - f(2)}{2} = \frac{f(2) - f(0)}{2} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} f'(\xi_2) = f'(\xi_1)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ άρα προφανώς $\xi \in (0, 4)$

τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

21.11 3)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (1)$$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha) = f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ άρα προφανώς $\xi \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$