

21.10 1)

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{με } x > 0}}{\Leftrightarrow} \quad x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

β) • Αν $\alpha = \beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα

• Αν $\alpha \neq \beta$, έστω $\alpha < \beta$, έχουμε

Η συνάρτηση f

– είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

– είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , με $f'(x) = x + \frac{1}{x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, με

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{f(1)=2}{\Rightarrow} \xi + \frac{1}{\xi} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \geq 2|\beta - \alpha| \Leftrightarrow \frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \left| \xi + \frac{1}{\xi} \right| \geq 2 \quad \stackrel{\xi > 0 \Rightarrow \xi + \frac{1}{\xi} > 0}{\Leftrightarrow} \quad \xi + \frac{1}{\xi} \geq 2, \text{ που ισχύει σύμφωνα με το α) ερώτημα}$$

21.10 2)

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$\left| \frac{2|x+3|}{x^2+11} \right| \leq 1 \quad \stackrel{x^2+11=|x^2+11|}{\Leftrightarrow} \quad \frac{|2x+6|}{|x^2+11|} \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2x+6}{x^2+11} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x+6}{x^2+11} \leq 1 \quad \stackrel{x^2+11>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 11 \leq 2x + 6 \leq x^2 + 11$$

που ισχύει διότι

$$\begin{cases} 2x + 6 \leq x^2 + 11 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 \geq 0 & \text{ισχύει αφού } \Delta = 4 - 20 < 0 \\ -x^2 - 11 \leq 2x + 6 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 17 \leq 0 & \text{ισχύει αφού } \Delta = 4 - 68 < 0 \end{cases}$$

β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , με $f'(x) = \frac{2(x+3)}{x^2+11}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{2(\xi+3)}{\xi^2+11} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq 2 \Leftrightarrow |f(\beta) - f(\alpha)| \leq 2|\beta - \alpha| \Leftrightarrow$$

$$\frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \left| \frac{2(\xi+3)}{\xi^2+11} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2|\xi+3|}{\xi^2+11} \leq 1, \text{ που}$$

ισχύει με βάση το ερώτημα α)

21.10 3)

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$\left| \frac{\sqrt{3x}}{x+3} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x} \leq x+3 \stackrel{x+3>0}{\Leftrightarrow} \left(2\sqrt{3x} \right)^2 \leq (x+3)^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 3x \leq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , με $f'(x) = \frac{\sqrt{3x}}{x+3}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{\sqrt{3\xi}}{\xi + 3} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\left| f(\beta) - f(\alpha) \right| \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \stackrel{\alpha < \beta \Rightarrow \beta - \alpha > 0 \Rightarrow \beta - \alpha = |\beta - \alpha|}{\Leftrightarrow} \left| f(\beta) - f(\alpha) \right| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha| \Leftrightarrow$$

$$\frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \left| \frac{\sqrt{3\xi}}{\xi + 3} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3\xi}}{\xi + 3} \leq \frac{1}{2}, \text{ που}$$

ισχύει με βάση το ερώτημα α)

21.10 4)

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$\left| \frac{2\eta\mu x}{e^x + 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|2\eta\mu x|}{|e^x + 1|} \leq 1 \stackrel{|e^x + 1| \geq 0}{\Leftrightarrow} |2\eta\mu x| \leq |e^x + 1|$$

που ισχύει διότι

$$|2\eta\mu x| = 2|\eta\mu x| \Rightarrow |2\eta\mu x| \leq 2 \cdot 1 \text{ Άρα } \boxed{|2\eta\mu x| \leq 2}$$

και

$$|e^x + 1| = e^x + 1 \stackrel{x > 0}{\geq} e^0 + 1 = 2. \text{ Άρα } \boxed{|e^x + 1| \geq 2}$$

β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[999, 1000]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(999, 1000)$, με $f'(x) = \frac{2\eta\mu x}{e^x + 1}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1000) - f(999)}{1000 - 999} \Rightarrow \frac{2\eta\mu\xi}{e^\xi + 1} = f(1000) - f(999) \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\left| f(1000) - f(999) \right| \leq 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \left| \frac{2\eta\mu\xi}{e^\xi + 1} \right| \leq 1 \text{ που ισχύει με βάση το ερώτημα α)}$$