

20.9 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων
 - είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
- $$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\alpha)=10}{g(\alpha)=5} = \frac{10}{5} = 2 \\ h(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{f(\beta)=4}{g(\beta)=2} = \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0}$$

20.9 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(1) = \frac{f(1)}{1} = \frac{f(1)=4}{1} = 4 \\ h(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{f(2)=8}{2} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow h(1) = h(2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot \xi - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) \cdot \xi - f(\xi) = 0}$$

20.9 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(2) = \frac{f(2)}{2} \\ h(3) = \frac{f(3)}{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{3f(2)=2f(3) \Rightarrow \frac{f(2)}{2} = \frac{f(3)}{3}} h(2) = h(3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[2, 3]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot \xi - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \xi - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) \cdot \xi = f(\xi)}$$

20.9 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \\ h(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}} h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} h'(\xi) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 \xRightarrow{\substack{g(\xi) \neq 0 \\ f(\xi) \neq 0}} \\ &\Rightarrow \frac{f'(\xi) \cancel{g(\xi)}}{f(\xi) \cancel{g(\xi)}} - \frac{\cancel{f(\xi)} g'(\xi)}{\cancel{f(\xi)} g(\xi)} = \frac{0}{f(\xi)g(\xi)} \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} \Rightarrow \boxed{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0} \end{aligned}$$