

20.8 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=-3, g(\alpha)=2}{=} 3 \cdot (-2) = -6 \\ h(\beta) = f(\beta) \cdot g(\beta) \stackrel{f(\beta)=6, g(\beta)=-1}{=} 6 \cdot (-1) = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi)g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0}$$

20.8 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = x \cdot f(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[-2, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = (x)'f(x) + x \cdot f'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(-2) = (-2) \cdot f(-2) \stackrel{f(-2)=3}{=} (-2) \cdot 3 = -6 \\ h(1) = 1 \cdot f(1) \stackrel{f(1)=-6}{=} -6 \end{array} \right\} \Rightarrow h(-2) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-2, 1]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (-2, 1)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + \xi \cdot f'(\xi) = 0$$

20.8 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = f(\beta) \cdot g(\beta) \stackrel{g(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0 \stackrel{g(\xi) \neq 0}{\Rightarrow} \Rightarrow \frac{f'(\xi) \cancel{g(\xi)}}{\cancel{g(\xi)}g'(\xi)} + \frac{f(\xi) \cancel{g'(\xi)}}{g(\xi) \cancel{g'(\xi)}} = \frac{0}{g(\xi)g'(\xi)} \Rightarrow \boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0}$$

20.8 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x)\eta\mu x$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = f'(x)\eta\mu x + f(x)(\eta\mu x)' = f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(0) = f(0)\eta\mu 0 = 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu \frac{\pi}{2} \stackrel{f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και επομένως η εξίσωση

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

20.8 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' = f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(0) = f(0)\sigma\upsilon\nu 0 \stackrel{f(0)=0}{=} 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και επομένως η εξίσωση

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x = 0} \quad \text{έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα} \\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

20.8 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [e, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) \cdot \ln x$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[e, 4]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(e, 4)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = f'(x) \ln x + f(x)(\ln x)' = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x}$$

και

$$\bullet \quad \left\{ \begin{array}{l} h(e) = f(e) \cdot \ln e = f(e) \\ h(4) = f(4) \cdot \ln 4 \end{array} \right\} \xRightarrow{f(4) \cdot \ln 4 = f(e)} h(e) = h(4)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[e, 4]$ και επομένως η εξίσωση

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = 0} \quad \text{έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα } (e, 4)$$