

20.7 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = 3f(x) - 5g(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[2, 5]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 5)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = 3f'(x) - 5g'(x)$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(2) = 3f(2) - 5g(2) \stackrel{f(2)=2, g(2)=1}{=} 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \\ h(5) = 3f(5) - 5g(5) \stackrel{f(5)=-3, g(5)=-2}{=} 3 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow h(2) = h(5)$$

και

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[2, 5]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (2, 5)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3f'(\xi) - 5g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{3f'(\xi) = 5g'(\xi)}$$

20.7 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) - 2g(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x) - 2g'(x)$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(0) = f(0) - 2g(0) \stackrel{f(0)=2, g(0)=0}{=} 2 - 2 \cdot 0 = 2 \\ h(1) = f(1) - 2g(1) \stackrel{f(1)=2, g(1)=2}{=} 6 - 2 \cdot 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(1)$$

και

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 2g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = 2g'(\xi)}$$

20.7 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = 2f(x) + 3g(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = 2f'(x) + 3g'(x)$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(\alpha) = 2f(\alpha) + 3g(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=2, g(\alpha)=1}{=} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\ h(\beta) = 2f(\beta) + 3g(\beta) \stackrel{f(\beta)=2, g(\beta)=1}{=} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[α, β]$ και επομένως υπάρχει $ξ \in (α, β)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{2f'(\xi) + 3g'(\xi) = 0}$$

20.7 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) - x^3$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x) - 3x^2$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(1) = f(1) - 1^3 \stackrel{f(1)=5}{=} 5 - 1 = 4 \\ h(2) = f(2) - 2^3 \stackrel{f(2)=12}{=} 12 - 8 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow h(1) = h(2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$ και επομένως υπάρχει $ξ \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = 3\xi^2}$$

20.7 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = 3f(x) - 2x^4$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = 3f'(x) - 8x^3$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(-1) = 3f(-1) - 2 \cdot (-1)^4 \stackrel{f(-1)=f(1)}{=} 3f(1) - 2 \\ h(1) = 3f(1) - 2 \cdot 1^4 = 3f(1) - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow h(-1) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ και επομένως υπάρχει $ξ \in (-1, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3f'(\xi) - 8\xi^3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{3f'(\xi) = 8\xi^3}$$

20.7 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) - \eta \mu x$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x) - \sigma \upsilon \nu x$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(0) = f(0) - \eta \mu 0 = f(0) \\ h(\pi) = f(\pi) - \eta \mu \pi \stackrel{f(0)=f(\pi)}{=} f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(\pi)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \sin \xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = \sin \xi}$$