

20.6 1)

α) Η συνάρτηση φ

- είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως πράξεις συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$\varphi'(x) = f'(x)e^{g(x)} + f(x)e^{g(x)}g'(x)$$

και

$$\left. \begin{aligned} \varphi(a) &= f(a)e^{g(a)} = 0 \\ \varphi(\beta) &= f(\beta)e^{g(\beta)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)e^{g(x)}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a, β) , η εξίσωση

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{g(x)} + f(x)e^{g(x)}g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{g(x)} + f(x)e^{g(x)}g'(x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{g(x)}[f'(x) + f(x)g'(x)] = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) + f(x)g'(x) = 0}$$

20.6 2)

α) Η συνάρτηση g

- είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη) με

$$g'(x) = e^x(f'(x) - f(x)) + e^x(f''(x) - f'(x)) \Rightarrow$$

$$g'(x) = \cancel{e^x f'(x)} - e^x f(x) + e^x f''(x) - \cancel{e^x f'(x)} \Rightarrow$$

$$g'(x) = e^x f''(x) - e^x f(x) \Rightarrow \boxed{g'(x) = e^x [f''(x) - f(x)]}$$

και

$$\left. \begin{aligned} g(a) &= e^a(f'(a) - f(a)) = 0 \\ g(\beta) &= e^\beta(f'(\beta) - f(\beta)) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(a) = g(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση $g(x) = e^x(f'(x) - f(x))$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι υπάρχει $c \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(c) = 0 \Rightarrow e^c[f''(c) - f(c)] = 0 \Rightarrow \boxed{f''(c) = f(c)}$$

20.6 3)

α) Η συνάρτηση g

- είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
 - είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- με

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x) \sin x - e^{f(x)} \eta \mu x$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sin \frac{\pi}{2} = 0 \\ g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Οπότε για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι υπάρχει

$$\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$g'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{f(\xi)} f'(\xi) \sin \xi - e^{f(\xi)} \eta \mu \xi = 0 \Rightarrow$$

$$e^{f(\xi)} [f'(\xi) \sin \xi - \eta \mu \xi] = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{f(\xi)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) \sin \xi - \eta \mu \xi = 0 \Rightarrow f'(\xi) \sin \xi = \eta \mu \xi \Rightarrow$$

$$\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin \xi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{\eta \mu \xi}{\sin \xi} \Rightarrow \boxed{f'(\xi) = \varepsilon \varphi \xi}$$