

20.5 1)

α) Η συνάρτηση g

- είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x) + 2x$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} g(-1) = f(-1) + (-1)^2 = -1 + 1 = 0 \\ g(2) = f(2) + (2)^2 = -4 + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(-1) = g(2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα $[-1, 2]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι υπάρχει

$$\xi \in (-1, 2) \text{ τέτοιο ώστε } g'(\xi) = 0 \xRightarrow{g'(x) = f'(x) + 2x} f'(\xi) + 2\xi = 0 \Rightarrow f'(\xi) = -2\xi$$

20.5 2)

α) Η συνάρτηση g

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x) - 2x$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} g(0) = f(0) - 0^2 = 0 - 0 = 0 \\ g(1) = f(1) - 1^2 = 1 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = g(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα $[0, 1]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι υπάρχει

$$x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } g'(x_0) = 0 \xRightarrow{g'(x) = f'(x) - 2x} f'(x_0) - 2x_0 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

20.5 3)

α) Η συνάρτηση φ

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x) = f(\beta)g(x) - f(x)g(\beta)$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\alpha) = f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) \stackrel{f(\alpha)=g(\alpha)=0}{=} 0 \\ \varphi(\beta) = \cancel{f(\beta)g(\beta)} - \cancel{f(\beta)g(\beta)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(\beta)g(x) - f(x)g(\beta)$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\gamma) = 0 \quad \overset{\varphi'(x) = f(\beta)g(x) - f(x)g(\beta)}{\Rightarrow} \quad f(\beta)g(\gamma) - f(\gamma)g(\beta) = 0 \Rightarrow f(\beta)g(\gamma) = f(\gamma)g(\beta)$$

20.5 4)

α) Η συνάρτηση g

- είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \varphi'(x) - \sin x$$

και

$$\bullet \quad \left\{ \begin{array}{l} g(0) = \varphi(0) - \eta\mu 0 \overset{\varphi(0)=0}{=} 0 \\ g(\pi) = \varphi(\pi) - \eta\mu\pi \overset{\varphi(\pi)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = g(\pi)$$

Οπότε για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Rightarrow \varphi'(\xi) - \sin \xi = 0 \Rightarrow \varphi'(\xi) = \sin \xi$