

20.4 1)

Παρατηρούμε ότι

στο διάστημα $[-1, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + x + 1) = 3 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x + 1) = 0^3 + 0 + 1 = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ (1)

Ακόμη

στο διάστημα $(-1, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(3x + 1)}{\cancel{x}} = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x^2 + 1)}{\cancel{x}} = 0^2 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ (2)

Τέλος

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 1 + 1 = 3 \\ f(1) &= 1^3 + 1 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1) = f(1) \quad (3)$$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$

20.4 2)

Παρατηρούμε ότι

στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών (1)

Ακόμη

$$f(x) = \begin{cases} -x \eta \mu x, & x < 0 \\ x \eta \mu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

οπότε

στο διάστημα $(-\pi, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο συνεχών

στο διάστημα $(0, \pi)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\cancel{x}\eta\mu x}{\cancel{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}\eta\mu x}{\cancel{x}} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta \text{ } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Οπότε $\eta \text{ } f$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ (2)

Τέλος

$$\left. \begin{aligned} f(-\pi) &= -\pi|\eta\mu(-\pi)| = 0 \\ f(\pi) &= \pi|\eta\mu\pi| = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-\pi) = f(\pi) \quad (3)$$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ άρα υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$ και προφανώς η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$