

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^{f(x)}(x - \alpha)(x - \beta)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[e^{f(x)} \right]' (x - \alpha)(x - \beta) + e^{f(x)} (x - \alpha)' (x - \beta) + e^{f(x)} (x - \alpha)(x - \beta)' = \\ &= e^{f(x)} f'(x) (x - \alpha)(x - \beta) + e^{f(x)} (x - \beta) + e^{f(x)} (x - \alpha) \end{aligned}$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= e^{f(\alpha)} (\alpha - \alpha)(\alpha - \beta) = 0 \\ h(\beta) &= e^{f(\beta)} (\beta - \alpha)(\beta - \beta) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{f(\xi)} f'(\xi) (\xi - \alpha)(\xi - \beta) + e^{f(\xi)} (\xi - \beta) + e^{f(\xi)} (\xi - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(\xi)} \left[f'(\xi) (\xi - \alpha)(\xi - \beta) + (\xi - \beta) + (\xi - \alpha) \right] = 0 \stackrel{e^{f(\xi)} \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) (\xi - \alpha)(\xi - \beta) + 2\xi - \beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) (\xi - \alpha)(\xi - \beta) = \beta + \alpha - 2\xi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \xi \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \xi - \alpha \neq 0, \xi - \beta \neq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \boxed{f'(\xi) = \frac{\beta + \alpha - 2\xi}{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)}} \end{aligned}$$