

20.3 1)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\alpha \cdot 0^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right) \cdot 0^2 + (\gamma - \delta) \cdot 0 + \delta = \delta \\ f(1) &= \frac{\alpha \cdot 1^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right) \cdot 1^2 + (\gamma - \delta) \cdot 1 + \delta = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \delta + \gamma - \cancel{\delta} + \cancel{\delta} = \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1)$$

$\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $(0, 1)$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$ και προφανώς η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x

20.3 2)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \alpha \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 + \gamma \cdot 0 + \delta = \delta \\ f(1) &= \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 + \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1)$$

$\alpha + \beta + \gamma = 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $(0, 1)$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$ και προφανώς η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x

20.3 3)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[2, 4]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2\alpha - \beta \ln 2 \stackrel{2\alpha = \beta \ln 2}{=} 0 \\ f(4) &= 4\alpha - \beta \ln 4 = 4\alpha - 2\beta \ln 2 \stackrel{2\alpha = \beta \ln 2}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = f(4)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $(2, 4)$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$ και προφανώς η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x

20.3 4)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

- είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\bullet \left. \begin{aligned} f(1) &= \alpha^1 - \beta \cdot 1 + 1 - 1 = \alpha - \beta \\ f(2) &= \alpha^2 - \beta \cdot 2 + 2 - 1 = \alpha^2 - 2\beta + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\alpha^2 - 2\beta + 1 = \alpha - \beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - \beta + 1 = 0 \text{ που ισχύει} \\ &= \end{aligned} f(1) = f(2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $(1, 2)$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$ και προφανώς η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

20.3 5)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[a, b]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\bullet \left. \begin{aligned} f(a) &= \frac{\ln a}{a} \\ f(b) &= \frac{\ln b}{b} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\alpha^\beta = \beta^\alpha \Leftrightarrow \ln \alpha^\beta = \ln \beta^\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta \ln \alpha = \alpha \ln \beta \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} = \frac{\ln \beta}{\beta} \\ &= \end{aligned} f(a) = f(b)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα (a, b) υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$ και προφανώς η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$