

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{f(x)}{x}$. Τότε

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)=\alpha}{\alpha} = 1 \\ h(\beta) &= \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{f(\beta)=\beta}{\beta} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\kappa \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\kappa) = 0 \Rightarrow \frac{\kappa f'(\kappa) - f(\kappa)}{\kappa^2} = 0 \Rightarrow \kappa f'(\kappa) - f(\kappa) = 0 \quad \kappa \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \kappa \neq 0 \Rightarrow \boxed{f'(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{\kappa}}$$

Ομοίως η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\beta, \gamma]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (β, γ) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\beta) &= \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{f(\beta)=\beta}{\beta} = 1 \\ h(\gamma) &= \frac{f(\gamma)}{\gamma} = \frac{f(\gamma)=\gamma}{\gamma} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\beta) = h(\gamma)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\beta, \gamma]$ και επομένως υπάρχει $\lambda \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda f'(\lambda) - f(\lambda)}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda f'(\lambda) - f(\lambda) = 0 \quad \lambda \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow \boxed{f'(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}}$$

β) Επειδή τα σημεία A , B και O είναι συνευθειακά θα ισχύει

$$\lambda_{OA} = \lambda_{OB} \Rightarrow \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} \Rightarrow \frac{f(\kappa) - 0}{\kappa - 0} = \frac{f(\lambda) - 0}{\lambda - 0} \Rightarrow \boxed{\frac{f(\kappa)}{\kappa} = \frac{f(\lambda)}{\lambda}} \quad (1)$$

Έτσι τώρα έχουμε ότι

η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$

είναι παραγωγίσιμη στο (κ, λ) αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

και

$$\left. \begin{aligned} f'(\kappa) &= \frac{f(\kappa) - f(\lambda)}{\kappa - \lambda} \\ f'(\lambda) &= \frac{f(\lambda) - f(\kappa)}{\lambda - \kappa} \end{aligned} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(\kappa) = f'(\lambda)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\kappa, \lambda) \Rightarrow \xi \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο

ώστε $\boxed{f''(\xi) = 0}$