

Θεωρούμε την συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Τότε

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, x_0) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

και

$$\left. \begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha) - \alpha \stackrel{f(\alpha)=\alpha}{=} 0 \\ g(x_0) &= f(x_0) - x_0 \stackrel{f(x_0)=x_0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\alpha) = g(x_0)$$

Οπότε για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, x_0]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_1) = 0$

Ακόμη η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, β) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

και

$$\left. \begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) - x_0 \stackrel{f(x_0)=x_0}{=} 0 \\ g(\beta) &= f(\beta) - \beta \stackrel{f(\beta)=\beta}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x_0) = g(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_0, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = 0$

Τέλος

Η συνάρτηση g'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων αφού η f

είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $\boxed{g''(x) = f''(x)}$

$$\left. \begin{aligned} g'(\xi_1) &= 0 \\ g'(\xi_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση g' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$g''(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f''(\xi) = 0}$$