

- α) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = f'(x) - 2\alpha x$$

Έτσι προκειμένου η g να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,1]$ θα πρέπει

$$g(0) = g(1) \Rightarrow f(0) - \alpha \cdot 0^2 = f(1) - \alpha \cdot 1^2 \Rightarrow \overset{f(0)=\kappa}{f(1)=\kappa+2} \Rightarrow \cancel{\kappa} = \cancel{\kappa} + 2 - \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

- β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - 2 \cdot 2 \cdot \xi = 0 \Rightarrow \boxed{f'(\xi) = 4\xi}$

- γ) Έστω ότι ο ξ του προηγούμενου ερωτήματος δεν είναι μοναδικός δηλαδή υπάρχει $\xi_1 \neq \xi$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 4\xi_1$. Έστω ότι $\xi < \xi_1$. Τότε

$$H \text{ συνάρτηση } g'(x) = f'(x) - 4x$$

είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) με $g''(x) = f''(x) - 4$

και

$$\left. \begin{array}{l} g'(\xi) = f'(\xi) - 4\xi \overset{f'(\xi)-4\xi=0}{=} 0 \\ g'(\xi_1) = f'(\xi_1) - 4\xi_1 \overset{f'(\xi_1)-4\xi_1=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\xi) = f(\xi_1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση g' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$g''(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) - 4 = 0 \Rightarrow f''(x_0) = 4 \quad \boxed{\text{άτοπο}} \quad \text{διότι } f''(x) \neq 4 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Άρα ο ξ του προηγούμενου ερωτήματος είναι μοναδικός