

20.24

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^8 - 7x - 6$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο Δ , τις ρ_1 , ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

Τότε

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 8x^7 - 7$

$$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 8x^7 - 7$

$$\left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Ατοπο διότι η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^7 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^7 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{\frac{7}{8}}$ έχει μόνο μία ρίζα

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^8 - 7x - 6 = 0$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο Δ , άρα έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο Δ