

Για να ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, και $f(-1) = f(1)$

Έτσι

στο διάστημα $[-1, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

άρα πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Επομένως θα πρέπει

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \alpha x + \beta) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma x^2 + 4x + 4) = 0^2 + \alpha \cdot 0 + \beta \Rightarrow \\ 0^2 + \alpha \cdot 0 + \beta &= \gamma \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow \boxed{\beta = 4}\end{aligned}$$

Ακόμη

στο διάστημα $(-1, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

άρα πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Επομένως θα πρέπει

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{f(0)=4}{\Rightarrow} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 4}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma x^2 + 4x + \cancel{4} - \cancel{4}}{x} \stackrel{\gamma=4}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \alpha x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x+\alpha)}{\cancel{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+4) \Rightarrow 0 + \alpha = 0 + 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}\end{aligned}$$

Τέλος

$$f(-1) = f(1) \Rightarrow (-1)^2 + \alpha(-1) + \beta = \gamma \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 \stackrel{\alpha=\beta=4}{\Rightarrow} 1 - \cancel{4} + \cancel{4} = \gamma + 8 \Rightarrow \boxed{\gamma = -7}$$

Με τις τιμές που βρήκαμε παραπάνω είναι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & , x \in [-1, 0] \\ -7x^2 + 4x + 4 & , x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 4x + \cancel{4} - \cancel{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}} = 0 + 4 = 4$$

και

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & , x \in [-1, 0] \\ -14x + 4 & , x \in (0, 1] \end{cases}$$

Οπότε

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \nu \ \xi \in [-1, 0] \Rightarrow 2\xi + 4 = 0 \Rightarrow 2\xi = -4 \Rightarrow \xi = -2 \text{ απορρίπτεται} \\ \alpha \nu \ \xi \in (-1, 0] \Rightarrow -14\xi + 4 = 0 \Rightarrow -14\xi = -4 \Rightarrow \xi = \frac{-4}{-14} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{2}{7}} \text{ δεκτή} \end{cases}$$