

20.22

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in (0,1)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - 1$
- $$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha^\xi \ln \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^\xi \ln \alpha = 1, \quad \boxed{\text{άτοπο}} \quad \text{διότι}$$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \ln \alpha < 0 \Rightarrow \alpha^\xi \ln \alpha < 0$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$