

20.20 1)

Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δέχεται δύο εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους, στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ και έστω $x_1 < x_2$

Επειδή οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες μεταξύ τους θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2)$

Έχουμε ότι $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Οπότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 + 6x + 2$

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0 \Rightarrow 12\xi^2 + 6\xi + 2 = 0$ άτοπο διότι $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 36 - 96 = -60 < 0$

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δεν δέχεται εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους

20.20 2)

Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δέχεται δύο εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους, στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ και έστω $x_1 < x_2$

Επειδή οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες μεταξύ τους θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2)$

Έχουμε ότι $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x + 2$. Οπότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 - 12x + 6$

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0 \Rightarrow 12\xi^2 - 12\xi + 6 = 0 \Rightarrow 2\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$ άτοπο διότι

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4 < 0$$

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δεν δέχεται εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους

20.20 3)

Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δέχεται δύο εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους, στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ και έστω $x_1 < x_2$

Επειδή οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες μεταξύ τους θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2)$

Έχουμε ότι $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 8x - 5$. Οπότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 24x^2 - 18x + 8$

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0 \Rightarrow 24\xi^2 - 18\xi + 8 = 0 \Rightarrow 12\xi^2 - 9\xi + 4 = 0$ άτοπο διότι

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4 = 81 - 192 = -111 < 0$$

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δεν δέχεται εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους

20.20 4)

Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δέχεται δύο εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους , στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ και έστω $x_1 < x_2$

Επειδή οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες μεταξύ τους θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2)$

Έχουμε ότι $f'(x) = 6x^5 + 8x^3 + 2x$. Οπότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πολυωνυμική

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 30x^4 + 24x^2 + 2$

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0 \Rightarrow 30\xi^4 + 24\xi^2 + 2 = 0$ άτοπο διότι προφανώς $30\xi^4 + 24\xi^2 + 2 > 0$

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δεν δέχεται εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους

20.20 5)

Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δέχεται δύο εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους , στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ και έστω $x_1 < x_2$

Επειδή οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες μεταξύ τους θα ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2)$

Έχουμε ότι $f'(x) = 2x - \eta\mu x$. Οπότε

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = 2 - \sigma\upsilon\nu x$

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0 \Rightarrow 2 - \sigma\upsilon\nu \xi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = 2$ άτοπο

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δεν δέχεται εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους