

20.19 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\alpha x^3 + 3\beta x^2 - 2\alpha x - 3\beta x$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x) = 6\alpha x^2 + 6\beta x - 2\alpha - 3\beta$
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2\alpha \cdot 0^3 + 3\beta \cdot 0^2 - 2\alpha \cdot 0 - 3\beta \cdot 0 = 0 \\ f(1) &= 2\alpha \cdot 1^3 + 3\beta \cdot 1^2 - 2\alpha \cdot 1 - 3\beta \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως η $f'(x) = 6\alpha x^2 + 6\beta x - 2\alpha - 3\beta$, άρα και η εξίσωση

$6\alpha x^2 + 6\beta x - 2\alpha - 3\beta = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

20.19 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - x$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 1$
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= \alpha \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 - 0 = 0 \\ f(1) &= \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 - 1 = \alpha + \beta - 1 \stackrel{\alpha+\beta=1}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως η $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 1$, άρα και η εξίσωση

$3\alpha x^2 + 2\beta x - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

20.19 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{(\beta + 2\delta)x^2}{2} + (\gamma - \delta)x$

Η συνάρτηση g

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με $g'(x) = \alpha x^2 + 2(\beta + 2\delta)x + \gamma - \delta$ (προφανώς $g'(x) = f'(x)$)

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= \frac{\alpha \cdot 0^3}{3} + \frac{(\beta + 2\delta) \cdot 0^2}{2} + (\gamma - \delta) \cdot 0 = 0 \\ g(1) &= \frac{\alpha \cdot 1^3}{3} + \frac{(\beta + 2\delta) \cdot 1^2}{2} + (\gamma - \delta) \cdot 1 = \frac{2\alpha + 3(\beta + 2\delta) + 6(\gamma - \delta)}{6} \\ &= \frac{2\alpha + 3\beta + \cancel{6\delta} + 6\gamma - \cancel{6\delta}}{6} = \frac{2\alpha + 3\beta + 6\gamma}{6} \stackrel{2\alpha+3\beta+6\gamma=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(0) = g(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$g'(x)=f(x) \Rightarrow f(\xi)=0$ δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης
 $f(x)=\alpha x^2+(\beta+2\delta)x+\gamma-\delta$ να διέρχεται από το σημείο $(\xi,0)$

20.19 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha_v x^{v+1}}{v+1} + \frac{\alpha_{v-1} x^v}{v} + \dots + \frac{\alpha_1 x^2}{2} + \alpha_0 x$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με
 $f'(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\alpha_v \cdot 0^{v+1}}{v+1} + \frac{\alpha_{v-1} \cdot 0^v}{v} + \dots + \frac{\alpha_1 \cdot 0^2}{2} + \alpha_0 \cdot 0 = 0 \\ f(1) &= \frac{\alpha_v \cdot 1^{v+1}}{v+1} + \frac{\alpha_{v-1} \cdot 1^v}{v} + \dots + \frac{\alpha_1 \cdot 1^2}{2} + \alpha_0 \cdot 1 = \\ &= \frac{\alpha_v}{v+1} + \frac{\alpha_{v-1}}{v} + \dots + \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως η $f'(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, άρα και η εξίσωση $\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

20.19 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με
 $f'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\alpha \cdot 0^3}{3} + \frac{\beta \cdot 0^2}{2} + \gamma \cdot 0 = 0 \\ f(1) &= \frac{\alpha \cdot 1^3}{3} + \frac{\beta \cdot 1^2}{2} + \gamma \cdot 1 = \frac{2\alpha + 3\beta + 6\gamma}{3} \stackrel{2\alpha+3\beta+6\gamma=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως η $f'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, άρα και η εξίσωση

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ που επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει $\Delta \geq 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$