

20.18 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + \alpha x - 4$. Προφανώς η f έχει τρεις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, οι τρεις ρίζες της f . Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 + 6x + \alpha$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 + 6x + \alpha$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Άρα η $f'(x) = 6x^2 + 6x + \alpha$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot \alpha > 0 \Rightarrow 36 - 24\alpha > 0 \Rightarrow \boxed{\alpha < \frac{3}{2}}$$

20.18 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - x^2 - \alpha x + 8$. Προφανώς η f έχει τρεις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, οι τρεις ρίζες της f . Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 2x - \alpha$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 2x - \alpha$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Άρα η $f'(x) = 3x^2 - 2x - \alpha$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot \alpha > 0 \Rightarrow 4 + 12\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > -\frac{4}{12} \Rightarrow \boxed{\alpha > -\frac{1}{3}}$$

20.18 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 8$. Προφανώς η f έχει τρεις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, οι τρεις ρίζες της f

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$
- $\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$
- $\left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Άρα η $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2\alpha)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \beta > 0 \Rightarrow 4\alpha^2 - 12\beta > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{12\beta}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha > 3\beta}$$

20.18 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1$. Προφανώς η f έχει τρεις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, οι τρεις ρίζες της f

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$
- $\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[p_1, p_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (p_1, p_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[p_2, p_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (p_2, p_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \gamma$
- $$\left. \begin{array}{l} f(p_2) = 0 \\ f(p_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(p_2) = f(p_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[p_2, p_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (p_2, p_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Άρα η $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \gamma$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot \gamma > 0 \Rightarrow 4b^2 - 12a\gamma > 0 \Rightarrow b^2 > \frac{12a\gamma}{4} \Rightarrow \boxed{b^2 > 3a\gamma}$$

20.18 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + x + 3$. Προφανώς η f έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$, οι τέσσερις ρίζες της f

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[p_1, p_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (p_1, p_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax + 1$
- $$\left. \begin{array}{l} f(p_1) = 0 \\ f(p_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(p_1) = f(p_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[p_1, p_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (p_1, p_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[p_2, p_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (p_2, p_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax + 1$
- $$\left. \begin{array}{l} f(p_2) = 0 \\ f(p_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(p_2) = f(p_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[p_2, p_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (p_2, p_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[p_3, p_4]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (p_3, p_4) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax + 1$
- $$\left. \begin{array}{l} f(p_3) = 0 \\ f(p_4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(p_3) = f(p_4)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[p_3, p_4]$ και επομένως υπάρχει $\xi_3 \in (p_3, p_4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_3) = 0$

Έτσι

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολωνυμική με $f''(x) = 12x^2 + 12x + 2a$
- $$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_1) = 0$

Ομοίως η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_2, \xi_3]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_2, ξ_3) , ως πολωνυμική με $f''(x) = 12x^2 + 12x + 2a$
- $$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_2) = 0 \\ f'(\xi_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_2, \xi_3]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_2) = 0$

Άρα η $f''(x) = 12x^2 + 12x + 2a = 2(6x^2 + 6x + a)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot a > 0 \Rightarrow 36 - 24a > 0 \Rightarrow -24a > -36 \Rightarrow a < \frac{36}{24} \Rightarrow \boxed{a < \frac{3}{2}}$$

20.18 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 - 4x - 10$. Προφανώς η f έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$, οι τέσσερις ρίζες της f

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2ax - 4$
- $$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως , η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2ax - 4$
- $$\left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Ομοίως , η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_3, \rho_4]$, ως πολωνυμική

- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_3, ρ_4) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2\alpha x - 4$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_3) = 0 \\ f(\rho_4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_3) = f(\rho_4)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_3, \rho_4]$ και επομένως υπάρχει $\xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_3) = 0$

Έτσι

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2\alpha$
- $$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_1) = 0$

Ομοίως η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_2, \xi_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_2, ξ_3) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2\alpha$
- $$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_2) = 0 \\ f'(\xi_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_2, \xi_3]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_2) = 0$

Άρα η $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2\alpha = 2(6x^2 - 3x + \alpha)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow 3^2 - 4 \cdot 6 \cdot \alpha > 0 \Rightarrow 9 - 24\alpha > 0 \Rightarrow -24\alpha > -9 \Rightarrow \alpha < \frac{9}{24} \Rightarrow \boxed{\alpha < \frac{3}{8}}$$

20.18 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 8x + 5$. Προφανώς η f έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$, οι τέσσερις ρίζες της f

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x + 5$
- $$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x + 5$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_3, \rho_4]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_3, ρ_4) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2\beta x + 5$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_3) = 0 \\ f(\rho_4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_3) = f(\rho_4)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_3, \rho_4]$ και επομένως υπάρχει $\xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_3) = 0$

Έτσι

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2\beta$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_1) = 0$

Ομοίως η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_2, \xi_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_2, ξ_3) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2\beta$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f'(\xi_2) = 0 \\ f'(\xi_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_2, \xi_3]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_2) = 0$

Άρα η $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2\beta = 2(6x^2 + 3ax + \beta)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow (3a)^2 - 4 \cdot 6 \cdot \beta > 0 \Rightarrow 9a^2 - 24\beta > 0 \Rightarrow 9a^2 > 24\beta \Rightarrow a^2 > \frac{24\beta}{9} \Rightarrow \boxed{a^2 > \frac{8\beta}{3}}$$

20.18 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + 3x - 7$. Προφανώς η f έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες. Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$, οι τέσσερις ρίζες της f

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4ax^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + 3$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4ax^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + 3$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Ομοίως, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_3, \rho_4]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_3, ρ_4) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4ax^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + 3$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_3) = 0 \\ f(\rho_4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_3) = f(\rho_4)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_3, \rho_4]$ και επομένως υπάρχει $\xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_3) = 0$

Έτσι

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12ax^2 + 6\beta x + 2\gamma$
- $\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_1) = 0$

Ομοίως η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_2, \xi_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_2, ξ_3) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12ax^2 + 6\beta x + 2\gamma$
- $\left. \begin{array}{l} f'(\xi_2) = 0 \\ f'(\xi_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_2, \xi_3]$ και επομένως υπάρχει $\lambda_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\lambda_2) = 0$

Άρα η $f''(x) = 12ax^2 + 6\beta x + 2\gamma = 2(6ax^2 + 3\beta x + \gamma)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι τριώνυμο θα ισχύει

$$\Delta > 0 \Rightarrow (3\beta)^2 - 4 \cdot 6a \cdot \gamma > 0 \Rightarrow 9\beta^2 - 24a\gamma > 0 \Rightarrow 9\beta^2 > 24a\gamma \Rightarrow \beta^2 > \frac{24a\gamma}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta^2 > \frac{8\alpha\gamma}{3}}$$