

20.16 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 2x^3 + 30x^2 + x + 2$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1 , ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 60x + 1$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 60x + 1$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολωνυμική με $f''(x) = 12x^2 - 12x + 60$
- $\left. \begin{matrix} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

άτοπο αφού $f''(x) = 12x^2 - 12x + 60 = 12(x^2 - x + 5) \neq 0$, διότι

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -19 < 0$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 - 2x^3 + 30x^2 + x + 2 = 0$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.16 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 7x + 5$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1 , ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική

- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

$$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x - 7$
- $\left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 - 12x + 12$
- $\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

άτοπο αφού $f''(x) = 12x^2 - 12x + 12 = 12(x^2 - x + 1) \neq 0$, διότι

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.16 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x^2 - 7x - 9$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1, ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x + 2x - 7$
- $\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

• είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x + 2x - 7$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

• είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
• είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = e^x + 2$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = 0 \Rightarrow e^\xi + 2 = 0 \Rightarrow e^\xi = -2 \quad \boxed{\text{άτοπο}}$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $e^x + x^2 - 7x - 9 = 0$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.16 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - \ln x$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1, ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε

Η συνάρτηση f

• είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
• είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f

• είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
• είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Τέλος

- Η συνάρτηση f'
- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως ρητή
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως ρητή με $f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{\xi^2} = 0 \Rightarrow \xi^2 = -\frac{1}{2} \quad \boxed{\text{άτοπο}}$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 = \ln x$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.16 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^4 + bx^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1 , ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2\gamma x + \delta$

$$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη , η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2\gamma x + \delta$

$$\left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2\gamma$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

άτοπο αφού $f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma = 2(6\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma) \neq 0$, διότι

$$\Delta = 9\beta^2 - 24\alpha\gamma = 3(3\beta^2 - 8\alpha\gamma) \stackrel{3\beta^2 < 8\alpha\gamma}{\Rightarrow} \Delta < 0$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.16 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu x - x^2$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1 , ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2x$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2x$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = -\eta\mu x - 2$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi - 2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = -2$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $\eta\mu x = x^2$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.16 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - x^2$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1 , ρ_2 και ρ_3 και έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \sin x - \eta \mu x - 2x$
- $$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Ακόμη, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \sin x - \eta \mu x - 2x$
- $$\left. \begin{array}{l} f(\rho_2) = 0 \\ f(\rho_3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = -\eta \mu x - \sin x - 2$
- $$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = 0 \\ f'(\xi_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta \mu \xi - \sin \xi - 2 = 0 \Leftrightarrow \eta \mu \xi + \sin \xi = -2 \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} -1 \leq \eta \mu \xi \leq 1 \\ -1 \leq \sin \xi \leq 1 \end{array}$$

$$\eta \mu \xi = -1 \text{ και } \sin \xi = -1 \text{ άτοπο (διότι } \eta \mu^2 \xi + \sin^2 \xi = 1)$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $\eta \mu x = x^2$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$