

20.15 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^5 + 10x - 3$

Η συνάρτηση f είναι πολωνυμική περιττού βαθμού άρα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

(διότι είναι συνεχής και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 10x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 10x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5) = +\infty$$

οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$ και άρα

θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα

μπορούμε βέβαια να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της ρίζας και με το θεώρημα Bolzano)

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 5x^4 + 10$
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 5\xi^4 + 10 = 0 \Leftrightarrow \xi^4 = -2, \text{ άτοπο}$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\mathbb{R}$

Οπότε

$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } \mathbb{R} \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα στο } \mathbb{R}$

άρα και η εξίσωση $x^5 + 10x - 3 = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.15 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^5 + 2x^3 + 2x - 1$

Η συνάρτηση f είναι πολωνυμική περιττού βαθμού άρα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

(διότι είναι συνεχής και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 2x^3 + 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 2x^3 + 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5) = +\infty$$

οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$ και άρα

θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα

μπορούμε βέβαια να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της ρίζας και με το θεώρημα Bolzano)

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 2$
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[ρ_1, ρ_2]$ και επομένως υπάρχει $ξ \in (ρ_1, ρ_2)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0 \Leftrightarrow 5ξ^4 + 6ξ^2 + 2 = 0$, άτοπο διότι $5ξ^4 + 6ξ^2 + 2 > 0$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\mathbb{R}$

Οπότε

$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } \mathbb{R} \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα στο } \mathbb{R}$

άρα και η εξίσωση $x^5 + 2x^3 + 2x - 1 = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.15 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 3x + \alpha$

(διότι είναι συνεχής και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + \alpha) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x + \alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{A}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$ και άρα

θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα

μπορούμε βέβαια να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της ρίζας και με το θεώρημα Bolzano)

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 3$
- $\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $ξ \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(ξ) = 0 \Leftrightarrow 3ξ^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow ξ^2 = -1, \quad \boxed{\text{άτοπο}}$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\mathbb{R}$

Οπότε

$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } \mathbb{R} \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η εξίσωση}$

$x^3 + 3x + \alpha = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.15 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x - x + 2$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{1}{2} \eta \mu 0 - 0 + 2 = 2 > 0 \\ f(\pi) = \frac{1}{2} \eta \mu \pi - \pi + 2 = -\pi + 2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0)f(\pi) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{1}{2} \sigma \nu x - 1$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του **θεωρήματος Rolle** στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sigma \nu \xi - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sigma \nu \xi = 1 \Rightarrow \sigma \nu \xi = 2, \boxed{\text{άτοπο}}$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα R

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } R \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο } R \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η εξίσωση}$$

$$\frac{1}{2} \eta \mu x = x - 2, \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα στο } R$$

20.15 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow R$ με $f(x) = x + \ln x - 3$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e^3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 + \ln 1 - 3 = -2 < 0 \\ f(e^3) = e^3 + \ln e^3 - 3 = e^3 + 3 - 3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1)f(e^3) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, e^3)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του **θεωρήματος Rolle** στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\xi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\xi} = -1 \Rightarrow \xi = -1, \boxed{\text{άτοπο}} \text{ διότι } \xi > 0$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\mathbb{R}$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } (0, +\infty) \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο } (0, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η εξίσωση}$$

$x + \ln x = 3$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.15 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$

Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού άρα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \gamma$
- $\left. \begin{array}{l} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3a\xi^2 + 2b\xi + \gamma = 0, \boxed{\text{άτοπο}} \text{ διότι}$$

$$\Delta = 4b^2 - 12a\gamma = 4(b^2 - 3a\gamma) = 4(b^2 - a\gamma - 2a\gamma) \stackrel{\beta^2 - a\gamma < 0 \Rightarrow a\gamma > \beta^2 \Rightarrow a\gamma > 0 \Rightarrow -2a\gamma < 0}{\Rightarrow} \Delta < 0$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\mathbb{R}$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } \mathbb{R} \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η εξίσωση}$$

$ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$