

20.14 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως πολωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -7 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(2) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$
- $$\left. \begin{aligned} f(\rho_1) &= 0 \\ f(\rho_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ άρα $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 4\xi - 4 = 0, \Delta = 4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4 = 64$$

$$\xi_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{4+8}{6} \Rightarrow \xi_1 = 2 \\ \xi_2 = \frac{4-8}{6} \Rightarrow \xi_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \boxed{\text{άτοπο}} \text{ διότι } \xi \in (0, 2)$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \text{η } f &\text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα } (0, 2) \\ \text{η } f &\text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα } (0, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η εξίσωση}$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα } (0, 2)$$

20.14 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$, η οποία

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως πολωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 3(-1)^2 + 5(-1) + 1 = -2 < 0 \\ f(1) &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1 = 10 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(1) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , στο $(-1, 1)$, έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική

- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνομική με $f'(x) = 3x^2 + 6x + 5$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ άρα $\xi \in (-1, 1)$,
τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 6\xi + 5 = 0 \quad , \quad \text{άτοπο} \quad \text{διότι} \quad \Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -24 < 0$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

Οπότε

$\left. \begin{matrix} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα } (-1, 1) \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα } (-1, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η}$
εξίσωση $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

20.14 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu 7x - 11x + 1$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $\left. \begin{matrix} f(0) = \eta\mu 7 \cdot 0 - 11 \cdot 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(\pi) = \eta\mu 7\pi - 11\pi + 1 = -11\pi + 1 < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(0)f(\pi) < 0$

Οπότε , από το θεώρημα Bolzano , η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 7\sigma\upsilon\nu 7x - 11$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 7\sigma\upsilon\nu 7\xi - 11 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 7\xi = \frac{11}{7} > 1 \quad , \quad \boxed{\text{άτοπο}}$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

Οπότε

$\left. \begin{matrix} \text{η } f \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα } (0, \pi) \\ \text{η } f \text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα } (0, \pi) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η εξίσωση}$

$\eta\mu 7x - 11x + 1 = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

20.14 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x + \eta \mu x + \beta$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 + \alpha \cdot 0 + \eta \mu 0 + \beta = \beta < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \alpha \frac{\pi}{2} + \eta \mu \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\alpha \pi}{2} + 1 + \beta \begin{matrix} -1 < \beta \Rightarrow 1 + \beta > 0 \\ > 0 \end{matrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
 - είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 3x^2 + \alpha + \sigma \nu x$
- $$\left. \begin{aligned} f(\rho_1) &= 0 \\ f(\rho_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + \alpha + \sigma \nu \xi = 0, \quad \boxed{\text{άτοπο}} \quad \text{διότι } \xi \in (\rho_1, \rho_2) \Rightarrow \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma \nu \xi > 0$$

και $\alpha > 1$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \text{η } f &\text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{η } f &\text{ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f, \text{ άρα και η εξίσωση}$$

$x^3 + \alpha x + \eta \mu x + \beta = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$