

20.12 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^x f(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$

και

$$\bullet \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= e^\alpha f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= e^\beta f(\beta) \stackrel{f(\beta)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)] = 0 \stackrel{e^\xi \neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{f(\xi) + f'(\xi) = 0}$$

20.12 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^{-x} f(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x)$

και

$$\bullet \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= e^{-\alpha} f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=e^\alpha}{=} e^{-\alpha} \cdot e^\alpha = 1 \\ h(\beta) &= e^{-\beta} f(\beta) \stackrel{f(\beta)=e^\beta}{=} e^{-\beta} \cdot e^\beta = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi} f(\xi) - e^{-\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi} [f(\xi) - f'(\xi)] = 0 \stackrel{e^{-\xi} \neq 0}{\Leftrightarrow} f(\xi) - f'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = f(\xi)}$$

20.12 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^{3x} f(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = e^{3x} f'(x) + 3e^{3x} f(x)$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(\alpha) = e^{3\alpha} f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = e^{3\beta} f(\beta) \stackrel{f(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{3x_0} f'(x_0) + 3e^{3x_0} f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{3x_0} [f'(x_0) + 3f(x_0)] = 0 \stackrel{e^{3x_0} \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) + 3f(x_0) = 0}$$

20.12 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^{-2x} f(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x)$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(\alpha) = e^{-2\alpha} f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = e^{-2\beta} f(\beta) \stackrel{f(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x_0} f'(x_0) - 2e^{-2x_0} f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x_0} [f'(x_0) - 2f(x_0)] = 0 \stackrel{e^{-2x_0} \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) - 2f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) = 2f(x_0)}$$

20.12 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^{\lambda x} g(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = e^{\lambda x} g'(x) + \lambda e^{\lambda x} g(x)$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(\alpha) = e^{3\alpha} g(\alpha) \stackrel{g(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = e^{3\beta} g(\beta) \stackrel{g(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda \xi} g'(\xi) + \lambda e^{\lambda \xi} g(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda \xi} [g'(\xi) + \lambda g(\xi)] = 0 \stackrel{e^{\lambda \xi} \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0}$$

20.12 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^{g(x)} f(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = e^{g(x)} f'(x) + e^{g(x)} g'(x) f(x)$$

και

$$\bullet \quad \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= e^{g(\alpha)} f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= e^{g(\beta)} f(\beta) \stackrel{f(\beta)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως η εξίσωση

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{g(x)} f'(x) + e^{g(x)} g'(x) f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{g(x)} [f'(x) + e^{g(x)} f(x)] = 0 \stackrel{e^{g(x)} \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) + e^{g(x)} f(x) = 0} \quad \text{έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα } (\alpha, \beta)$$

20.12 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x)}{e^{g(x)}}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x)e^{g(x)} - f(x)e^{g(x)}g'(x)}{e^{2g(x)}}$$

και

$$\bullet \quad \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{e^{g(\alpha)}} \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= \frac{f(\beta)}{e^{g(\beta)}} \stackrel{f(\beta)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως η εξίσωση

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)e^{g(\xi)} - f(\xi)e^{g(\xi)}g'(\xi)}{e^{2g(\xi)}} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)e^{g(\xi)} - f(\xi)e^{g(\xi)}g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{g(\xi)} [f'(\xi) - f(\xi)g'(\xi)] = 0 \stackrel{e^{g(\xi)} \neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{f'(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0} \quad \text{έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα } (\alpha, \beta)$$