

20.11 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f^2(x) - x^2$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2x$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(0) = f^2(0) - 0^2 \stackrel{f(0)=0}{=} 0 \\ h(1) = f^2(1) - 1^2 \stackrel{f(1)=1}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi)f'(\xi) = \xi}$$

20.11 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = [f(x) - f(\alpha)](x - \beta)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x)(x - \beta) + f(x) - f(\alpha)$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(\alpha) = [f(\alpha) - f(\alpha)](\alpha - \beta) = 0 \\ h(\beta) = [f(\beta) - f(\alpha)](\beta - \beta) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\xi - \beta) + f(\xi) - f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\xi - \beta) + f(\xi) - f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi - \beta) = -f(\xi) + f(\alpha) \stackrel{\xi \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \xi \neq \beta}{\Leftrightarrow} \boxed{f'(\xi) = \frac{-f(\xi) + f(\alpha)}{\xi - \beta}}$$

20.11 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{\ln f(x)}{x}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{f(x)}f'(x)x - \ln f(x)}{x^2} = \frac{\frac{f'(x)x - f(x)\ln f(x)}{f(x)}}{x^2} = \frac{f'(x)x - f(x)\ln f(x)}{x^2 f(x)}$$

και

$$\bullet \left. \begin{aligned} h(1) &= \frac{\ln f(1)}{1} = \ln f(1) \\ h(2) &= \frac{\ln f(2)}{2} \stackrel{f(2)=f^2(1)}{=} \frac{\ln f^2(1)}{2} = \frac{\cancel{2} \ln f(1)}{\cancel{2}} = \ln f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(1) = h(2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)\ln f(\xi)}{x^2 f(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\xi - f(\xi)\ln f(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f'(\xi)\xi = f(\xi)\ln f(\xi)}$$

20.11 4)

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \xi + \frac{f(\xi)}{\xi} \Leftrightarrow \xi f'(\xi) = \xi^2 + f(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = \xi^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 1 \end{aligned}$$

Έτσι

$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση } h: [\alpha, \alpha+1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } h(x) = \frac{f(x)}{x} - x$$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha+1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \alpha+1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - 1$$

και

$$\bullet \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \alpha \\ h(\alpha+1) &= \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} - \alpha - 1 \stackrel{\frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} + 1}{=} \frac{f(\alpha)}{\alpha} + 1 - \alpha - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\alpha+1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 1 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = \xi^2 \Leftrightarrow$$

$$\xi \in (\alpha, \alpha+1) \Leftrightarrow \xi \neq 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = \xi^2 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(\xi)}{\xi} = \xi \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = \xi + \frac{f(\xi)}{\xi}}$$

20.11 5)

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi} \Leftrightarrow f'(\xi)(\alpha - \xi)(\beta - \xi) = f(\xi)(\beta - \xi) + f(\xi)(\alpha - \xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(\alpha - \xi)(\beta - \xi) - f(\xi)(\beta - \xi) - f(\xi)(\alpha - \xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)(\xi - \alpha)(\xi - \beta) + f(\xi)(\xi - \beta) - f(\xi)(\xi - \alpha) = 0$$

Έτσι

$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση } h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } h(x) = f(x)(x - \alpha)(x - \beta)$$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[α, β]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x)(x - α)(x - β) + f(x)(x - β) + f(x)(x - α)$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(α) = f(α)(α - α)(α - β) = 0 \\ h(β) = f(β)(β - α)(β - β) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(α) = h(β)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[α, β]$ και επομένως υπάρχει $ξ \in (α, β)$, τέτοιο ώστε

$$h'(ξ) = 0 \Leftrightarrow f'(ξ)(ξ - α)(ξ - β) + f(ξ)(ξ - β) + f(ξ)(ξ - α) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \frac{f(x) \neq 0}{\xi \in (\alpha, \beta) \Rightarrow (\xi - \alpha)(\xi - \beta) \neq 0} \\ \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{\xi - \alpha} + \frac{1}{\xi - \beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{1}{\xi - \alpha} - \frac{1}{\xi - \beta} \Leftrightarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}}$$

20.11 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = xf'(x) - f(x) - f(0)x$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = xf''(x) + \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} - f(0) = xf''(x) - f(0)$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(0) = 0 \cdot f'(0) - f(0) - f(0) \cdot 0 = -f(0) \\ h(1) = 1 \cdot f'(1) - f(1) - f(1) \cdot 1 \stackrel{f'(1)=f(1)=f(0)}{=} -f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως υπάρχει $ξ \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(ξ) = 0 \Leftrightarrow \xi f''(\xi) - f(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi f''(\xi) = f(0)}$$