

20.10 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x)f(1-x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(0) = f(0)f(1) \\ h(1) = f(1)f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως υπάρχει $c \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c) = 0 \Leftrightarrow f'(c)f(1-c) = f(c)f'(1-c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(c) \cancel{f(1-c)}}{f(c) \cancel{f(1-c)}} = \frac{\cancel{f(c)} f'(1-c)}{\cancel{f(c)} f(1-c)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}}$$

20.10 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x)}{f(x^2)}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot f(x^2) - 2xf(x) \cdot f(x^2)}{f^2(x^2)}$$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1 \\ h(1) = \frac{f(1)}{f(1)} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0) \cdot f(x_0^2) - 2x_0 f(x_0) \cdot f(x_0^2)}{f^2(x_0^2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) \cdot f(x_0^2) - 2x_0 f(x_0) \cdot f(x_0^2) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot f(x_0^2) = 2x_0 f(x_0) \cdot f(x_0^2)$$

20.10 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = (x - \alpha)f(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = (x - \alpha)' f(x) + (x - \alpha) f'(x) = f(x) + (x - \alpha) f'(x)$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(0) = (0 - \alpha) f(0) \stackrel{f(0)=0}{=} 0 \\ h(\alpha) = (\alpha - \alpha) f(\alpha) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(\alpha)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \alpha]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + (\xi - \alpha) f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = -(\xi - \alpha) f'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\xi) = (\alpha - \xi) f'(\xi)}$$

20.10 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x) \sin x - f(x) (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{f'(x) \sin x + f(x) \eta \mu x}{\sin^2 x}$$

και

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\sin \alpha} \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = \frac{f(\beta)}{\sin \beta} \stackrel{f(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \eta \mu \xi}{\sin^2 \xi} = 0 \Rightarrow f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \eta \mu \xi = 0 \stackrel{\text{διαιρούμε με } \eta \mu \xi \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi) \sin \xi}{\eta \mu \xi} + \frac{f(\xi) \cancel{\eta \mu \xi}}{\cancel{\eta \mu \xi}} = 0 \Rightarrow f'(\xi) \sigma \phi \xi + f(\xi) = 0$$

20.10 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = x f(x) \ln x$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = (x)' f(x) \ln x + f'(x) \ln x + x f(x) (\ln x)' =$$

$$= f(x) \ln x + x f'(x) \ln x + \cancel{x} f(x) \frac{1}{\cancel{x}} = f(x) \ln x + x f'(x) \ln x + f(x)$$

και

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(1) = 1 \cdot f(1) \cdot \ln 1 \stackrel{\ln 1=0}{=} 0 \\ h(2) = 2 \cdot f(2) \cdot \ln 2 \stackrel{f(2)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(1) = h(2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \ln \xi + \xi f'(\xi) \ln \xi + f(\xi) = 0$$

20.10 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{f(x) \eta \mu x}{x}$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{xf'(x) \eta \mu x + xf(x)(\eta \mu x)' - f(x) \eta \mu x (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{xf'(x) \eta \mu x + xf(x) \sigma \nu \nu x - f(x) \eta \mu x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(\pi) = \frac{f(\pi) \eta \mu \pi}{\pi} \stackrel{\eta \mu \pi=0}{=} 0 \\ h(2\pi) = \frac{f(2\pi) \eta \mu 2\pi}{2\pi} \stackrel{\eta \mu 2\pi=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\pi) = h(2\pi)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\pi, 2\pi)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} h'(\xi) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) \eta \mu \xi + \xi f(\xi) \sigma \nu \nu \xi - f(\xi) \eta \mu \xi}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \xi f'(\xi) \eta \mu \xi + \xi f(\xi) \sigma \nu \nu \xi - f(\xi) \eta \mu \xi \end{aligned}$$