

20.1 1)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ως πολυωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= -0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(1) &= -1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

20.1 2)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[0,4]$, ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$, ως πολυωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^4 - 4 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 20 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(1) &= \cancel{4^4} - \cancel{4 \cdot 4^3} - 5 \cdot 4^2 + 20 \cdot 4 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(4)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

20.1 3)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 \sin 0 = 0 \cdot 1 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

20.1 4)

Έχουμε ότι

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[1,3]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1-3)\ln 1 = 0 \\ f(3) &= (3-3)\ln 3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = f(3)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$