

Είναι $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = [2, +\infty)$. Οπότε

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in \mathbb{R}, \text{ που ισχύει πάντα}$$

και

$$f(x) \in A_g \Rightarrow f(x) \in [2, +\infty) \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in [2, +\infty) \Rightarrow x \geq 2$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in \mathbb{R} \text{ που ισχύει πάντα}$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ g} = [2, +\infty)$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 1 = \sqrt{x - 2}^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$$

Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και $A_g = \mathbb{R}$. Οπότε

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \neq 1$$

και

$$f(x) \in A_g \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}, \text{ που ισχύει πάντα}$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{1\}$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}, \text{ που ισχύει πάντα}$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow 1 - x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

Άρα $A_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0\}$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1-x^2}{1-(1-x^2)} = \frac{1-x^2}{1-1+x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$$

2.4 3)

Είναι $A_f = [1, +\infty)$ και $A_g = (1, +\infty)$. Οπότε

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1,$$

και

$$f(x) \in A_g \Rightarrow f(x) \in (1, +\infty) \Rightarrow \sqrt{x-1} > 1 \Rightarrow \sqrt{x-1}^2 > 1^2 \Rightarrow x-1 > 1 \Rightarrow x > 2$$

Άρα $A_{g \circ f} = (2, +\infty)$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(\sqrt{x-1}-1)$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in (1, +\infty) \Rightarrow x > 1$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in [1, +\infty) \Rightarrow \ln(x-1) \geq 1 \Rightarrow \ln(x-1) \geq \ln e \Rightarrow x-1 \geq e \Rightarrow x \geq e+1$$

Άρα $A_{f \circ g} = [e+1, +\infty)$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{\ln(x-1)-1}$$

2.4 4)

$$\Delta = 36 - 32 = 4, \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-6-2}{-2} = 4 \\ x_2 = \frac{-6+2}{-2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x \leq 4$$

Επομένως $A_f = [2, 4]$ και $A_g = \mathbb{R}$. Οπότε

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in [2, 4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4,$$

και

$f(x) \in A_g \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ που ισχύει πάντα

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = [2, 4]$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \boxed{2^{\sqrt{-x^2+6x-8}}}$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in [2, 4] \Rightarrow 2 \leq 2^x \leq 4 \Rightarrow 2^1 \leq 2^x \leq 2^2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$\text{Άρα } \boxed{A_{f \circ g} = [1, 2]}$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{-g^2(x) + 6 \cdot g^2(x) - 8} = \boxed{\sqrt{-2^{2x} + 6 \cdot 2^x - 8}}$$