

2.3 1)

Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in [3, 8] \Rightarrow 3 \leq x \leq 8 \quad (1)$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in [-5, 1] \Rightarrow -5 \leq 2x - 9 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 10 \Rightarrow 2 \leq x \leq 5 \quad (2)$$

Συναλθιεύοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε $A_{f \circ g} = [2, 4]$

και ακόμη

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5g(x) - 3 = 5(2x - 9) - 3 = 10x - 48$$

2.3 2)

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in [-2, 4] \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$$

και

$$f(x) \in A_g \Rightarrow f(x) \in [1, 5] \Rightarrow 1 \leq x - 1 \leq 5 \Rightarrow 2 \leq x \leq 6$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = [2, 4]$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 7 = 3(x - 1) + 7 = 3x + 4$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in [1, 5] \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in [-2, 4] \Rightarrow -2 \leq 3x + 7 \leq 4 \Rightarrow -9 \leq 3x \leq -3 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο ανισώσεις δεν έχουν κοινές λύσεις άρα **η $f \circ g$ δεν ορίζεται**

γ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι $A_{f \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in [-2, 4] \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$$

και

$$f(x) \in A_f \Rightarrow f(x) \in [-2, 4] \Rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ f} = [-1, 4]$$

και

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) - 1 = (x - 1) - 1 = x - 2$$

δ) Το πεδίο ορισμού της $g \circ g$ είναι $A_{g \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in [1, 5] \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

και

$$g(x) \in A_g \Rightarrow g(x) \in [1, 5] \Rightarrow 1 \leq 3x + 7 \leq 5 \Rightarrow -6 \leq 3x \leq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο ανισώσεις δεν έχουν κοινές λύσεις άρα **η fog δεν ορίζεται**

2.3 3)

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in [-5, 9] \Rightarrow -5 \leq x < 9$$

και

$$f(x) \in A_g \Rightarrow f(x) \in (-1, 10] \Rightarrow -1 < x - 2 \leq 10 \Rightarrow 1 < x \leq 12$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = (1, 9)$$

και

$$\boxed{(g \circ f)(x)} = g(f(x)) = -2f(x) + 1 = -2(x - 2) + 1 = \boxed{-2x + 5}$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in (-1, 10] \Rightarrow -1 < x \leq 10$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in [-5, 9] \Rightarrow -5 \leq -2x + 1 < 9 \Rightarrow -6 \leq -2x < 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \geq x > -4 \Rightarrow -4 < x \leq 3$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ g} = (-1, 3]$$

και

$$\boxed{(f \circ g)(x)} = f(g(x)) = g(x) - 2 = -2x + 1 - 2 = \boxed{-2x - 1}$$

γ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι $A_{f \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in [-5, 9] \Rightarrow -5 \leq x < 9$$

και

$$f(x) \in A_f \Rightarrow f(x) \in [-5, 9] \Rightarrow -5 \leq x - 2 < 9 \Rightarrow -3 \leq x < 11$$

$$\text{Άρα } \boxed{A_{f \circ f} = [-3, 9]}$$

και

$$\boxed{(f \circ f)(x)} = f(f(x)) = f(x) - 2 = (x - 2) - 2 = \boxed{x - 4}$$

δ) Το πεδίο ορισμού της $g \circ g$ είναι $A_{g \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in (-1, 10] \Rightarrow -1 < x \leq 10$$

και

$$g(x) \in A_g \Rightarrow g(x) \in (-1, 10] \Rightarrow -1 < -2x + 1 \leq 10 \Rightarrow -2 < -2x \leq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > x \geq -\frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} \leq x < 1$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ g} = (-1, 1)$$

και

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = -2g(x) + 1 = -2(-2x + 1) + 1 = 4x - 1$$

2.3 4)

Το πεδίο ορισμού της g είναι προφανώς το $\mathbb{R}$. Οπότε

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in (-1, 6] \Rightarrow -1 < x \leq 6$$

και

$$f(x) \in A_g \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}, \text{ που ισχύει πάντα}$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = A_f = (-1, 6]$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 3)^2 + 2 = x^2 + 6x + 9 + 2 = x^2 + 6x + 11$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι $A_{f \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in (-1, 6] \Rightarrow -1 < x \leq 6$$

και

$$f(x) \in A_f \Rightarrow f(x) \in (-1, 6] \Rightarrow -1 < x + 3 \leq 6 \Rightarrow -4 < x \leq 3$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ f} = (-1, 3]$$

και

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) + 3 = x + 3 + 3 = x + 6$$

γ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in (-1, 6] \Rightarrow -1 < x^2 + 2 \leq 6 \Rightarrow -3 < x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 > -3 \text{ ισχύει πάντα}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ g} = [-2, 2]$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 3 = x^2 + 2 + 3 = x^2 + 5$$

2.3 5)

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in (2, 7] \Rightarrow 2 < x \leq 7$$

και

$$f(x) \in A_g \Rightarrow 2x - 1 \in (-3, 5] \Rightarrow -3 < 2x - 1 \leq 5 \Rightarrow -2 < 2x \leq 6 \Rightarrow -1 < x \leq 3,$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = (2, 3]$$

και

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = -(2x - 1)^2 + 3 = -(4x^2 - 4x + 1) + 3 = \\ &= -4x^2 + 4x - 1 + 3 = -4x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

β) Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι $A_{f \circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_f \Rightarrow x \in (2, 7] \Rightarrow 2 < x \leq 7$$

και

$$f(x) \in A_f \Rightarrow f(x) \in (2, 7] \Rightarrow 2 < 2x - 1 \leq 7 \Rightarrow 3 < 2x \leq 8 \Rightarrow \frac{3}{2} < x \leq 4$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ f} = (2, 4]$$

και

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2f(x) - 1 = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 2 - 1 = 4x - 3$$

γ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in (-3, 5] \Rightarrow -3 < x \leq 5$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in (2, 7] \Rightarrow 2 < -x^2 + 3 \leq 7 \Rightarrow -1 < -x^2 \leq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > x^2 \geq -4 \stackrel{x^2 > -4 \text{ ισχύει πάντα}}{\Rightarrow} x^2 < 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ g} = (-1, 1)$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(-x^2 + 3) - 1 = -2x^2 + 6 - 1 = -2x^2 + 5$$