

$$\alpha) \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x_1=x_2=1} f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$$

$$\beta) \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x_1=x, x_2=\frac{1}{x}} f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \xRightarrow{f(1)=0} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)}$$

$$\gamma) \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x_2 \text{ το } \frac{1}{x_2}} f\left(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\right) = f(x_1) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ ερώτημα} &\Rightarrow f\left(\frac{1}{x_2}\right) = -f(x_2) \\ &\Rightarrow \boxed{f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)} \end{aligned}$$

$$\delta) \quad 1) \quad \text{Είναι } A_f = (0, +\infty) \text{ και } A_g = \mathbb{R} - \{-1\}. \text{ Οπότε}$$

$$\text{Το πεδίο ορισμού της } f \circ g \text{ είναι } A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow x \neq -1$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\text{Άρα } \boxed{A_{f \circ g} = (-1, 1)}$$

$$2) \quad \text{Καταρχήν από το πεδίο ορισμού της } f \circ g \text{ παρατηρούμε}$$

$$\text{ότι για κάθε } x \in A_{f \circ g} \Rightarrow -x \in A_{f \circ g}$$

Ακόμη

$$\boxed{(f \circ g)(-x)} = f(g(-x)) = f\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right) = f\left(\frac{1}{g(x)}\right) =$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ ερώτημα} \\ = -f(g(x)) = \boxed{-(f \circ g)(x)} \end{aligned}$$

Άρα η $f \circ g$ είναι περιττή