

19.9 1)

Επειδή η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -1 \quad (2)$$

Οπότε

$$\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)(2x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{2x+1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} \stackrel{(1)}{=} 3 \cdot 2 = \boxed{6}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[f(x) - 3x]}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \\ &\stackrel{(2)}{=} (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

19.9 2)

Επειδή η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 1 \quad (2)$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - x^2}{x^2 f(x) - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left[\frac{f(x)}{x} - 1 \right]}{\cancel{x} [f(x) - 2x]} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{2-1}{1} = \boxed{1}$$

19.9 3)

Επειδή η ευθεία $y = 5x - 8$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x] = -8 \quad (2)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + xf(x) - 5x^2}{\ln x + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left[\frac{f(x)}{x} + f(x) - 5x \right]}{\cancel{x} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right)} \stackrel{\substack{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{DLH} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0}}{(1),(2)} = \frac{5-8}{0+1} = \boxed{-3} \end{aligned}$$

19.9 4)

Επειδή η ευθεία $y = 3x + 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] = 4 \quad (2)$$

αλλά ακόμη $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (3)$

(διότι αν θέσουμε $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 3$ και

$$f(x) = xh(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xh(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \cdot 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty)$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x) - 3xf(x) + 1}{2x + xe^x - 5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) \left[f(x) - 3x + \frac{1}{f(x)} \right]}{x \left(2 + e^x - \frac{5}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[f(x) - 3x \right] + \frac{1}{f(x)}}{2 + e^x - \frac{5}{x}} \stackrel{(1),(2),(3)}{=} 3 \cdot \frac{4 + \frac{1}{-\infty}}{2 + 0 - 0} = 3 \cdot \frac{4}{2} = \boxed{6}\end{aligned}$$

19.9 5)

Επειδή η ευθεία $y = -2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = 1 \quad (2)$$

$$\text{αλλά ακόμη} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (3)$$

$$(\text{διότι αν θέσουμε } h(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -2 \text{ και}$$

$$f(x) = xh(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xh(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \cdot (-2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty)$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 + 1} - x^2 \right) \left[xf^2(x) + 2x^2 f(x) + 1 \right] &\stackrel{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διαφορούμε με} \\ \sqrt{x^4 + 1} + x^2}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 + 1} - x^2 \right) \left(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 \right)}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2} \left[xf^2(x) + 2x^2 f(x) + 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}^2 - x^4}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + x^2} \left[xf^2(x) + 2x^2 f(x) + 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^4} + 1 - \cancel{x^4}}{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + 1 \right)} \left[xf^2(x) + 2x^2 f(x) + 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + 1 \right)} \cancel{x} f(x) \left[f(x) + 2x + \frac{1}{xf(x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(f(x) + 2x \right) + \frac{1}{xf(x)} \right] \stackrel{(1),(2),(3)}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} \cdot (-2) \cdot \left(1 + \frac{1}{-\infty} \right) = \boxed{-2}\end{aligned}$$

19.9 6)

Επειδή η ευθεία $y = 4x - 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = -7 \quad (2)$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa f(x) - 8x + 11}{\kappa f(x) - 4x^2 + x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left[\kappa \frac{f(x)}{x} - 8 + \frac{11}{x} \right]}{\cancel{x} [f(x) - 4x + 1]} = 2 \Rightarrow \frac{(1),(2) \kappa \cdot 4 - 8 + 0}{-7 + 1} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\kappa - 8}{-6} = 2 \Rightarrow 4\kappa - 8 = -12 \Rightarrow 4\kappa = -4 \Rightarrow \kappa = -1$$

19.9 7)

Επειδή η ευθεία $y = -x + 9$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 9 \quad (2)$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x f(x) + x^2 - 4\kappa x}{\kappa f(x) + x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} [f(x) + x - 4\kappa]}{\cancel{x} \left[\kappa \frac{f(x)}{x} + 1 \right]} = 3 \Rightarrow \frac{(1),(2) 9 - 4\kappa}{-\kappa + 1} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 - 4\kappa = 3(-\kappa + 1) \Rightarrow 9 - 4\kappa = -3\kappa + 3 \Rightarrow -4\kappa + 3\kappa = +3 - 9 \Rightarrow -\kappa = -6 \Rightarrow \boxed{\kappa = 6}$$