Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

19.8 1)

Θέτουμε $h(x)=xf(x)-x^2-x-2$, $x>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=3$ (1) και ακόμη

$$h(x)=xf(x)-x^2-x-2 \Rightarrow xf(x)=h(x)+x^2+x+2 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{h(x)+x^2+x+2}{x} \quad (2)$$

Οπότε

- $$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{h(x)+x^2+x+2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)+x^2+x+2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{x^2}+\frac{x^2+x+2}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \overset{(1)}{=} \frac{3}{+\infty}+1=0+1=1$$

- $$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] \overset{f(x)=\frac{h(x)+x^2+x+2}{x},\ \lambda=1}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)+x^2+x+2}{x}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)+\cancel{x^2}+x+2-\cancel{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=$$

$$=\frac{3}{+\infty}+1+\frac{2}{+\infty}=1$$

Άρα η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

19.8 2)

Θέτουμε $h(x)=xf(x)-\ln x+2x^2$, $x>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2$ και ακόμη

$$h(x)=xf(x)-\ln x+2x^2 \Rightarrow xf(x)=h(x)+\ln x-2x^2 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{h(x)+\ln x-2x^2}{x} \quad (1)$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{h(x)+\ln x-2x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)+\ln x-2x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{x^2}+\frac{\ln x-2x^2}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-2x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \overset{\substack{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0}}{=}$$

$$=\frac{2}{+\infty}+0-2=0-2=\boxed{-2}$$

Επομένως

$$\boxed{\lambda}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\boxed{1}$$

Ακόμη

$$\boxed{\beta}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]\overset{f(x)=\frac{h(x)+\ln x-2x^2}{x}\,,\,\lambda=-2}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)+\ln x-2x^2}{x}+2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)+\ln x-\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\substack{\lim_{x\to+\infty}h(x)=2\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0}}{=}\frac{2}{+\infty}+0=\boxed{0}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y=-2x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

19.8 3)

Θέτουμε $h(x)=xf(x)-e^x-x^2$, $x<0$, οπότε $\lim_{x\to-\infty}h(x)=3$ (1) και ακόμη

$$h(x)=xf(x)-e^x-x^2\Rightarrow xf(x)=h(x)+e^x+x^2\overset{x\neq0}{\Rightarrow}f(x)=\frac{h(x)+e^x+x^2}{x}\quad(2)$$

Οπότε

- $$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{h(x)+e^x+x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)+e^x+x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{h(x)}{x^2}+\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}h(x)\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}e^x\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=$$

$$\overset{\lim_{x\to-\infty}h(x)=3}{=}\quad 3\cdot0+0\cdot0+1=\boxed{1}$$

- $$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]\overset{f(x)=\frac{h(x)+e^x+x^2}{x}\,,\,\lambda=1}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{h(x)+e^x+x^2}{x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)+e^x+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)+e^x}{x}=\frac{3+0}{-\infty}=\boxed{0}$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

19.8 4)

Θέτουμε $h(x)=\frac{xf(x)+x^2}{\sqrt{x^2+x+2}}$, $x<0$, οπότε $\lim_{x\to-\infty}h(x)=4$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{xf(x)+x^2}{\sqrt{x^2+x+2}}\Rightarrow xf(x)+x^2=h(x)\sqrt{x^2+x+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow xf(x)=h(x)\sqrt{x^2+x+2}-x^2\overset{x\neq0}{\Rightarrow}f(x)=\frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}-x^2}{x}\quad(2)$$

Οπότε

- $$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}-x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}}{x^2} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} h(x)\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^2} - 1 \overset{(1)}{=} 2\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x^2} - 1 \overset{|x|=-x}{=}$$

$$4\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x^{\cancel{2}}} - 1 = 4\cdot 0 - 1 = \boxed{-1}$$

- $$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] \overset{f(x)=\frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}-x^2}{x},\ \lambda=-1}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}-x^2}{x}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)\sqrt{x^2+x+2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} \overset{|x|=-x}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}h(x)\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}} \overset{\lim_{x\to-\infty} h(x)=4}{=}$$

$$= -4\cdot\sqrt{1+0-0} = \boxed{-4}$$

Άρα η ευθεία $y=-x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$