

19.7 1)

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x^2+x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}+x-1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \frac{x+1}{x^2+x} &\leq f(x) - 2x + 1 \leq \frac{x+3}{x^2+x-1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x + 1] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0} \end{array}$$

Άρα η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

19.7 2)

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2+1} &= \frac{2}{+\infty} = 0 \\ \frac{5}{x} &\leq f(x) - x - 3 \leq \frac{2}{x^2+1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 3] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0} \end{array}$$

Άρα η ευθεία $y = x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

19.7 3)

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} &\stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{\text{DLH}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x+1} &\stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{\text{DLH}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \frac{\ln x}{e^x} &\leq f(x) + 3x - 5 \leq \frac{x}{e^x+1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x - 5] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-3x + 5)] = 0} \end{array}$$

Άρα η ευθεία $y = -3x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

19.7 4)

Έχουμε ότι $|f(x) - x + 2| \leq \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow -\frac{x}{x^2 + 1} \leq f(x) - x + 2 \leq \frac{x}{x^2 + 1}$. Επομένως

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}} + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} \right) = -\frac{1}{+\infty} = 0 \\ -\frac{x}{x^2 + 1} &\leq f(x) - x + 2 \leq \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 2] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0} \end{array}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x - 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

19.7 5)

Έχουμε ότι $|f(x) - 4x - 3| \leq x^2 e^x \Rightarrow -x^2 e^x \leq f(x) - 4x - 3 \leq x^2 e^x$. Επομένως

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 e^x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = \frac{2}{-\infty} = 0 \\ -x^2 e^x &\leq f(x) - 4x - 3 \leq x^2 e^x \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

κριτήριο παρεμβολής
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 4x - 3] = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (4x + 3)] = 0}$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 4x + 3}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

19.7 6)

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} &\leq f(x) \leq \frac{x^2 + 2x + 3}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{3}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 2 - \frac{3}{x} &\leq f(x) \leq x + 2 + \frac{3}{x} \Rightarrow -\frac{3}{x} \leq f(x) - x - 2 \leq \frac{3}{x} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x} \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} &= 0 \\ -\frac{3}{x} &\leq f(x) - x - 2 \leq \frac{3}{x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 2] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0} \end{array}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$