

19.3 1)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2\}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1} \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x - 1}{x + 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1 - x^2 - 2x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1} \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + x - 1}{x + 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1 - x^2 - 2x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.3 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{3\}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \boxed{2} \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - x + 1}{x - 3} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1 - 2x^2 + 6x}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 11}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = \boxed{5}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \boxed{2}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - x + 1}{x - 3} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{2x^2} - x + 1 - \cancel{2x^2} + 6x}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 11}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x} = \boxed{5}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 2x + 5}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.3 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{\text{ρίζες του παρονομαστή}\}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^2 - 2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \boxed{2}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^3} + 2x^2 - x + 1 - \cancel{4x^3} + 4x^2 - 2x}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{6 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} = \boxed{3}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 2x + 3}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^2 - 2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \boxed{2}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{4x^3} + 2x^2 - x + 1 - \cancel{4x^3} + 4x^2 - 2x}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{6 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} = \boxed{3}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 2x + 3}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.3 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{3\}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3 - 3x^2 - x + 4}{3x - 8}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 4}{3x^2 - 8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3} = \boxed{+\infty}$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 4}{3x - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 4}{3x^2 - 8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3} = \boxed{+\infty}\end{aligned}$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη ούτε στο $-\infty$

19.3 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το R. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}}{\cancel{x}} = \\ &= \sqrt{4 - 0 + 0} = \boxed{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 8x + 7} - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 8x + 7} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 8x + 7} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 8x + 7} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + 7}^2 - 4x^2}{x \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 8x + 7 - \cancel{4x^2}}{x \left(\sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}} + 2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-8 + \frac{7}{x} \right)}{x \left(\sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{-8 + 0}{\sqrt{4 - 0 + 0} + 2} = \frac{-8}{4} = \boxed{-2}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 2x - 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x} \stackrel{x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}}{\cancel{x}} = \\ &= -\sqrt{4 - 0 + 0} = \boxed{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=-2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 8x + 7} + 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 8x + 7} + 2x)(\sqrt{4x^2 - 8x + 7} - 2x)}{\sqrt{4x^2 - 8x + 7} - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + 7}^2 - 4x^2}{|x| \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}} - 2x} \stackrel{x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 8x + 7 - \cancel{4x^2}}{-x \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}} - 2x} =\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x+7}{x \left(-\sqrt{4-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}}-2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-8+\frac{7}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{4-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}}-2 \right)} =$$

$$= \frac{-8+0}{-\sqrt{4-0+0}-2} = \frac{-8}{-4} = \boxed{2}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = -2x + 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

19.3 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}{x} \underset{x>0}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+2 \right)}{\cancel{x}} = \sqrt{4-0+0}+2 = \boxed{4}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=4}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-4x+1}+2x-4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-4x+1}-2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-4x+1}-2x)(\sqrt{4x^2-4x+1}+2x)}{\sqrt{4x^2-4x+1}+2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}^2-4x^2}{x \sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2}-4x+1-\cancel{4x^2}}{x \left(\sqrt{4-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}}+2 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(-4+\frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}}+2 \right)} = \frac{-4+0}{\sqrt{4-0+0}+2} = \frac{-4}{4} = \boxed{-1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 4x - 1}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}{x} \underset{x<0}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(-\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+2 \right)}{\cancel{x}} = -\sqrt{4-0+0}+2 = \boxed{0}$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ (αν έχει ασύμπτωτη αυτή θα είναι οριζόντια και όχι πλάγια)

19.3 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{0\}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{\eta\mu x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\eta\mu x}{x^2} \stackrel{\text{επεξήγηση1}}{=} 2 + 0 = \boxed{2}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2\cancel{x} + \frac{\eta\mu x}{x} - 2\cancel{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} \stackrel{\text{επεξήγηση2}}{=} \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 2x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \frac{\eta\mu x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\eta\mu x}{x^2} \stackrel{\text{επεξήγηση1}}{=} 2 + 0 = \boxed{2}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2\cancel{x} + \frac{\eta\mu x}{x} - 2\cancel{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} \stackrel{\text{επεξήγηση3}}{=} \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 2x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

επεξήγηση 1

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \eta\mu x \leq 1 &\Rightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = 0}$$

επεξήγηση 2

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \eta\mu x \leq 1 &\stackrel{\text{όταν } x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0}{\Rightarrow} -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x} \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0}$$

επεξήγηση 3

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \eta\mu x \leq 1 &\stackrel{\text{όταν } x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0}{\Rightarrow} -\frac{1}{x} \geq \frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{1}{x} \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0}$$

19.3 8)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Θα ψάξουμε λοιπόν για πλάγιες ασύμπτωτες μόνο στο $+\infty$

Έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\substack{+\infty \\ +\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (αν έχει ασύμπτωτη αυτή θα είναι οριζόντια και όχι πλάγια)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}} + \frac{1}{1} = +\infty + 1 = \boxed{+\infty}$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}} + \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = \boxed{1}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x + \cancel{x} - \cancel{x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.3 10)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 5x + 1}{|x-1| + 2}}{x} \stackrel{x>1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 5x + 1}{x-1+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 1}{|x-1| + 2} - x \right] \stackrel{x>1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 1}{x-1+2} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 5x + 1 - \cancel{x^2} - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{x} = \boxed{-6} \end{aligned}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = x - 6}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 5x + 1}{|x-1| + 2}}{x} \stackrel{x<1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 5x + 1}{-x+1+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=-1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 1}{|x-1| + 2} + x \right] \stackrel{x<1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 1}{-x+1+2} + x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 5x + 1 - \cancel{x^2} + 3x}{-x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{-x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x} = \boxed{2} \end{aligned}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = -x + 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x-5}{|x-2|+1}}{x} \stackrel{x>2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x-5}{x-2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0\end{aligned}$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (αν έχει ασύμπτωτη αυτή θα είναι οριζόντια και όχι πλάγια)

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x-5}{|x-2|+1}}{x} \stackrel{x<2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x-5}{-x+2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{-x^2+3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-x} = 0\end{aligned}$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ (αν έχει ασύμπτωτη αυτή θα είναι οριζόντια και όχι πλάγια)

19.3 12)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2-3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2-3}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \stackrel{x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \\ &= -\sqrt{1+0} = -1 \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=-1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-\infty)(-2)} = 0\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

