

19.10 1)

Επειδή η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = -1 \quad (2)$$

Ακόμη

$$f(x) = g(x) + x + \chi\eta\mu \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = f(x) - x - \chi\eta\mu \frac{1}{x} \quad (3)$$

Οπότε για την πλάγια ασύμπτωτη της C_g έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x - \chi\eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\chi\eta\mu} \frac{1}{\cancel{x}}}{\cancel{x}} \stackrel{(1)}{=} 2 - 1 - 0 = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - \lambda x] \stackrel{g(x)=f(x)-x-\chi\eta\mu \frac{1}{x}, \lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - x - \chi\eta\mu \frac{1}{x} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - 2x - \chi\eta\mu \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\chi\eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\chi\eta\mu \frac{1}{x} \right) \stackrel{\text{θέτουμε } y = \frac{1}{x} \text{ όταν } x \rightarrow +\infty \text{ τότε } y \rightarrow 0^+}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = -1$$

$$= -1 - 1 = \boxed{-2}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x - 2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

19.10 2)

Επειδή η ευθεία $y = 3x + 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 4 \quad (2)$$

Ακόμη

$$f(x) = g(x) - 2x + 1 \Rightarrow g(x) = f(x) + 2x - 1 \quad (3)$$

Οπότε για την πλάγια ασύμπτωτη της C_g έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \stackrel{(1)}{=} 3 + 2 - 0 = \boxed{5}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - \lambda x] \stackrel{g(x)=f(x)+2x-1, \lambda=5}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x - 1 - 5x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] - \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \stackrel{(2)}{=} 4 - 1 = \boxed{3}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = 5x + 3}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

19.10 3)

Επειδή η ευθεία $y = x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = 3 \quad (2)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) + 2g(x)$

Προφανώς είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$ και ακόμη

$$h(x) = f(x) + 2g(x) \Rightarrow f(x) = h(x) - 2g(x) \quad (3)$$

Οπότε για την πλάγια ασύμπτωτη της C_f έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) - 2g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \frac{3}{+\infty} - 2 \cdot 1 = 0 - 2 = \boxed{-2}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{f(x)=h(x)-2g(x), \lambda=-2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - 2g(x) + 2x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = 3 - 2 \cdot 3 = \boxed{-3} \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = -2x - 3}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

19.10 4)

Επειδή η ευθεία $y = 4x + 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = 7 \quad (2)$$

Για την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x) + 2x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{x} &\stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=-x \\ \text{όταν } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y)}{-y} \stackrel{(1)}{=} -4 \\ &= -4 + 2 + 0 = -2 \end{aligned}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - \lambda x] \stackrel{g(x)=f(-x)+2x+5, \lambda=-2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(-x) + 2x + 5 + 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(-x) + 4x + 5] \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=-x \\ \text{όταν } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} [f(y) - 4y + 5] \stackrel{(2)}{=} 7 + 5 = 12$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = -2x + 12}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$