Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

18.7 1)

α) $$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\overset{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0}{=}(+\infty)(1-0)=+\infty$$

β) $$\lim_{x\to+\infty}(x^2-e^x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(\frac{x^2}{e^x}-1-\frac{\ln x}{e^x}\right)\quad (1)$$

Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Δηλαδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ (2) και $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$ (3)

Οπότε

$$(1)\overset{(2),(3)}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}(x^2-e^x-\ln x)=(+\infty)(0-1-0)=-\infty$$

18.7 2)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2-\ln x)}=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)\overset{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0}{=}(+\infty)(1-0)=\boxed{+\infty}$$

18.7 3)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(3x^2-5\ln x)}=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(3-\frac{5\ln x}{x^2}\right)\overset{\lim_{x\to+\infty}\frac{5\ln x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x^2}=0}{=}(+\infty)(3-0)=\boxed{+\infty}$$

18.7 4)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)}=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\overset{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0}{=}(+\infty)(1-0)=\boxed{+\infty}$$

18.7 5)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x-e^x)}=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}-1\right)\overset{\substack{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0}}{=}$$

$$=(+\infty)(0-0-1)=\boxed{-\infty}$$

18.7 6)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2-3e^{4x})}=\lim_{x\to+\infty}e^{4x}\left(\frac{x^2}{e^{4x}}-3\right)\overset{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{4x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{4e^{4x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{16e^{4x}}=0}{=}$$

$$=(+\infty)(0-3)=\boxed{-\infty}$$

18.7 7)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(5^x-2x^3\right)}=\lim_{x\to+\infty}5^x\left(1-\frac{2x^3}{5^x}\right)\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{5^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{5^x\ln5}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12x}{5^x\ln^2 5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{5^x\ln^3 5}=0}{=}$$

$$=(+\infty)(1-0)=\boxed{+\infty}$$

18.7 8)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(7^x-2^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}7^x\left(1-\frac{2^x}{7^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}7^x\left[1-\left(\frac{2}{7}\right)^x\right]\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^x=0}{=}(+\infty)(1-0)=\boxed{+\infty}$$

18.7 9)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2e^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(\frac{x^2}{e^x}-2\right)\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0}{=}(+\infty)(0-2)=\boxed{-\infty}$$

18.7 10)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-2^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}2^x\left(\frac{\ln x}{2^x}-1\right)\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2^x\ln2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot2^x\ln2}=0}{=}(+\infty)(0-1)=\boxed{-\infty}$$

18.7 11)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\ln2x-3e^{3x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}\left(\frac{\ln2x}{e^{3x}}-3\right)\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln2x}{e^{3x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\not2x}\cdot\not2}{e^{3x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot e^{3x}}=0}{=}$$

$$=(+\infty)(0-3)=\boxed{-\infty}$$

18.7 12)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^4+2^x-4\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}2^x\left(\frac{3x^4}{2^x}+1-\frac{4\ln x}{2^x}\right)\quad(1)$$

Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{2^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^3}{2^x\ln2}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{36x^2}{2^x\ln^2 2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{72x}{2^x\ln^3 2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{72}{2^x\ln^4 2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln x}{2^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(4\ln x)'}{(2^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2^x\ln2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot2^x\ln2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{2^x}=0$ (2) και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\ln x}{2^x}=0$ (3)

Οπότε

$$(1)\overset{(2),(3)}{\Rightarrow}\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(3x^4+2^x-4\ln x\right)}=(+\infty)(0+1-0)=\boxed{+\infty}$$

18.7 13)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+4x^3-5^x-4\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}5^x\left(\frac{3^x}{5^x}+\frac{4x^3}{5^x}-1-\frac{4\ln x}{5^x}\right)\quad(1)$$

Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{5^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{5^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^2}{5^x\ln 5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{24x}{5^x\ln^2 5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{24}{5^x\ln^3 5}=\frac{24}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln x}{5^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(4\ln x)'}{(5^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{5^x\ln 5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot 5^x\ln 5}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Δηλαδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{5^x}=0$ (2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{5^x}=0$ (3) και $\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln x}{2^x}=0$ (4)

Οπότε

$$(1)\overset{(2),(3),(4)}{\Rightarrow}\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+4x^3-5^x-4\ln x\right)}=(+\infty)(0+0+1-0)=\boxed{+\infty}$$