Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

18.6 1)

Χωρίζουμε το όριο σε δύο απλούστερα όρια. Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)\cdot\ln\left(x+1\right)}{x\cdot ημx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+1\right)}{ημx}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+1\right)}{ημx}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln\left(x+1\right)\right]'}{\left(ημx\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{συνx}=\frac{1}{1}=1$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)\cdot\ln\left(x+1\right)}{x\cdot ημx}\overset{\substack{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{ημx}=1}}{=}1\cdot 1=1$$

18.6 2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{xημ2x}{\ln\left(x+1\right)\cdot συν\left(\frac{9π}{2}-x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln\left(x+1\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ημ2x}{συν\left(\frac{9π}{2}-x\right)}\overset{\substack{επεξήγηση 1\\ επεξήγηση 2}}{=}1\cdot 2=\boxed{2}$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln\left(x+1\right)}}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=1$$

επεξήγηση 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ2x}{συν\left(\frac{9π}{2}-x\right)}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2συν2x}{-ημ\left(\frac{9π}{2}-x\right)(-1)}=2$$

18.6 3)

Χωρίζουμε το όριο σε δύο απλούστερα όρια. Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left(e^x-συνx\right)}{\left(e^x-1\right)\left(1-συνx\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-συνx}{e^x-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-συνx}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-συνx}{e^x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-συνx\right)'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ημx}{e^x}=\frac{1+0}{1}=1$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-συνx}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2\right]'}{\left(1-συνx\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{ημx}\overset{\lim_{x\to 0}\frac{x}{ημx}=1}{=}2\cdot 1=2$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left(e^x-συνx\right)}{\left(e^x-1\right)\left(1-συνx\right)}\overset{\substack{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-συνx}{e^x-1}=1\\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-συνx}=2}}{=}1\cdot 2=2$$

18.6 4)

Χωρίζουμε το όριο σε δύο απλούστερα όρια. Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2x-1\right)\left[\ln(x+1)-x\right]}{\left(x^3+x^2\right)(\sigma\upsilon\nu x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^3+x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{\sigma\upsilon\nu x-1}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^3+x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2x-1\right)'}{\left(x^3+x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{3x^2+2x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^{2x}-2\right)'}{\left(3x^2+2x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{6x+2}=\frac{4e^0}{6\cdot 0+2}=\frac{4}{2}=2$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{\sigma\upsilon\nu x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(x+1)-x\right]'}{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{-\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+1}-1\right)'}{(-\eta\mu x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+1}-1\right)'}{(-\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{-\frac{1}{(0+1)^2}}{-\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{-1}{-1}=1$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2x-1\right)\left[\ln(x+1)-x\right]}{\left(x^3+x^2\right)(\sigma\upsilon\nu x-1)}\overset{\substack{\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^3+x^2}=2\\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{\sigma\upsilon\nu x-1}=1}}{=}2\cdot 1=2$$

18.6 5)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\ln(\ln x)}{\ln\left(x^2-1\right)\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\ln\left(x^2-1\right)}\overset{\substack{\varepsilon\pi\varepsilon\xi\acute{\eta}\gamma\eta\sigma\eta 1\\ \varepsilon\pi\varepsilon\xi\acute{\eta}\gamma\eta\sigma\eta 2}}{=}1\cdot 1=\boxed{1}$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\boxed{1}$$

επεξήγηση 2

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\ln\left(x^2-1\right)}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{2x^2\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2x^2}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{\ln x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{\ln x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\cdot 2=\boxed{1}$$