

18.10

Έχουμε

$$x-1 \leq f(x) \leq e^{x-2} \quad \text{θέτουμε } x=2 \Rightarrow 2-1 \leq f(2) \leq e^{2-2} \Rightarrow 1 \leq f(2) \leq 1 \Rightarrow f(2)=1$$

Άρα

$$x-1 \leq f(x) \leq e^{x-2} \Rightarrow x-1-1 \leq f(x)-1 \leq e^{x-2}-1 \Rightarrow$$

$$x-2 \leq f(x)-f(2) \leq e^{x-2}-1 \quad (1)$$

Αν  $x > 2$  τότε

$$(1) \Rightarrow \frac{x-2}{x-2} \leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq \frac{e^{x-2}-1}{x-2}$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{x-2}}{1} = 1 \\ 1 \leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \end{array} \right\} \text{κριτήριο παρεμβολής} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1} \quad (2)$$

Ομοίως αν  $x < 2$  τότε

$$(1) \Rightarrow \frac{x-2}{x-2} \geq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \geq \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \Rightarrow 1 \geq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \geq \frac{e^{x-2}-1}{x-2}$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{x-2}}{1} = 1 \\ 1 \geq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \geq \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \end{array} \right\} \text{κριτήριο παρεμβολής} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1} \quad (3)$$

$$\text{Από (2) και (3) έχουμε } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 1}$$

18.11

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+1} - \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} \cdot \left[ 1 - \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \right] =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} &\stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}^2} = \frac{2}{+\infty} = 0 \\ &= (+\infty)(1-0) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

## 18.12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(x+1)}{(e^x - x - 1) \cdot (e^x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - \sin x} \stackrel{\substack{\text{επεξήγηση 1} \\ \text{επεξήγηση 2}}}{=} 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

επεξήγηση 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = \boxed{2}$$

επεξήγηση 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - \sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = \boxed{1}$$

## 18.13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\alpha^x)}{\ln(1+\beta^x)} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha^x \ln \alpha}{1+\alpha^x}}{\frac{\beta^x \ln \beta}{1+\beta^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha^x}{1+\alpha^x} \ln \alpha}{\frac{\beta^x}{1+\beta^x} \ln \beta} \stackrel{\substack{\frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha^x \ln \alpha}{1+\alpha^x}}{\frac{\beta^x \ln \beta}{1+\beta^x}} \stackrel{\substack{\frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha^x \ln \alpha}{1+\alpha^x}}{\frac{\beta^x \ln \beta}{1+\beta^x}} = \boxed{\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}}$$

## 18.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x \ln(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \ln(x^2 + 1)] \stackrel{\substack{\text{επεξήγηση 1} \\ \text{επεξήγηση 2}}}{=} 0 \cdot 0 = \boxed{0}$$

επεξήγηση 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \boxed{0}$$

επεξήγηση 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \ln(x^2 + 1)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x}{\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{2x^2 \ln^2 x}{x^2 + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{2}{x^2 + 1} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{2}{x^2 + 1} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln^2 x) = \\ &= (-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \ln x}{x} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^3}} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^3}} = \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 2 \cdot 0 = \boxed{0} \end{aligned}$$

## 18.15

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\sqrt{x}}}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln x \sqrt{x}}}{e^{x \ln 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x} \ln x}}{e^{x \ln 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x} \ln x - x \ln 3} \stackrel{\text{επεξήγηση 1}}{=} e^{-\infty} = \boxed{0}$$

επεξήγηση 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} \ln x - x \ln 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\sqrt{x} \ln x}{x} - \ln 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \ln 3 \right) \stackrel{\text{επεξήγηση 2}}{=}$$

$$(+\infty)(0 - \ln 3) = \boxed{-\infty}$$

επεξήγηση 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{\substack{+\infty \\ \text{DLH } x \rightarrow +\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$$

## 18.16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x - f(0)}{f(x) - f(0)} \stackrel{\substack{\frac{0}{0} \\ \text{DLH } x \rightarrow 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x}{f'(x)} \stackrel{f': \text{συνεχής στο } x_0=0}{=} =$$

$$\frac{f'(0) \sin 0 - f(0) \eta \mu 0}{f'(0)} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = \boxed{1}$$

## 18.17

α) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0,1)$  και στο διάστημα  $(1, +\infty)$  ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ακόμη

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x - x + 1}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2} \stackrel{\substack{\frac{0}{0} \\ \text{DLH}}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x - 1)} \stackrel{\substack{\frac{0}{0} \\ \text{DLH } x \rightarrow 1}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και στο  $x_0 = 1$  οπότε είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$

β) Για κάθε  $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ , έχουμε

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{(x-1) - x \ln x}{x(x-1)^2}}$$

$$\text{και } f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Οπότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1) - x \ln x}{x(x-1)^2} & , x \in (0,1) \cup (1, +\infty) \\ -\frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$$

Η  $f'$  είναι συνεχής στο  $(0,1)$  και στο  $(1, +\infty)$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Μένει να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής και στο  $x_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{(x-1)^2} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \left( \ln x + x \frac{1}{x} \right)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \ln x - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x}{2(x-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x}}{2} = -\frac{1}{2} = \boxed{f'(1)} \end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι η  $f$  είναι συνεχής και στο  $x_0 = 1$

Οπότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$

## 18.18

**α)** Έχουμε

$$\begin{aligned} f^3(x) + f(x) &= x - \sin x + e^{-x} \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f^3(0) + f(0) = 0 - \sin 0 + e^{-0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f^3(0) + f(0) = 0 \Rightarrow f(0) [f^2(0) + 1] = 0 \stackrel{f^2(0)+1 \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{f(0) = 0} \end{aligned}$$

**β)** Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{\substack{f: \text{παραγωγίσιμη} \\ \text{άρα και συνεχής}}}{=} f(0) = 0$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} f^3(x) + f(x) &= x - \sin x + e^{-x} \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 + \eta\mu x - e^{-x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) [3f^2(x) + 1] = 1 + \eta\mu x - e^{-x} \stackrel{3f^2(x)+1 \neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{1 + \eta\mu x - e^{-x}}{3f^2(x) + 1} \quad (1) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu x - e^{-x}}{2x(3f^2(x) + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot [3f^2(x) + 1]} \cdot \frac{1 + \eta\mu x - e^{-x}}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3f^2(x) + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu x - e^{-x}}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3f^2(0) + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu x - e^{-x}}{x} \stackrel{f(0)=0}{=} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 0^2 + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu x - e^{-x}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^{-x}}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 0 + e^{-0}}{1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{1} \end{aligned}$$