

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

17.19 1)

Έστω $R(t)$, $V(t)$, η ακτίνα και ο όγκος του μπαλονιού. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$ $R'(t) = 2$ $R(t_0) = 10$	$V'(t_0) = ;$

Οπότε

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t) R'(t) \Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) R'(t) \xrightarrow{t=t_0} \\ \Rightarrow V'(t_0) = 4\pi R^2(t_0) R'(t_0) \xrightarrow{R(t_0)=10, R'(t_0)=2} V'(t_0) = 4\pi \cdot 10^2 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{V'(t_0) = 800\pi}$$

17.19 2)

Έστω $R(t)$, $V(t)$, η ακτίνα και ο όγκος του μπαλονιού. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$ $R'(t) = -8$ $R(t_0) = 5$	$V'(t_0) = ;$

Οπότε

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t) R'(t) \Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) R'(t) \xrightarrow{t=t_0} \\ \Rightarrow V'(t_0) = 4\pi R^2(t_0) R'(t_0) \xrightarrow{R(t_0)=5, R'(t_0)=-8} V'(t_0) = 4\pi \cdot 5^2 \cdot (-8) \Rightarrow \boxed{V'(t_0) = -800\pi}$$

17.19 3)

Έστω $R(t)$, $V(t)$, η ακτίνα και ο όγκος του μπαλονιού. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$ $V'(t_0) = 4\pi$ $R(t_0) = 8$	$R'(t_0) = ;$

Οπότε

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t) R'(t) \Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) R'(t) \xrightarrow{t=t_0}$$

$$\Rightarrow V'(t_0) = 4\pi R^2(t_0) R'(t_0) \Rightarrow \cancel{4\pi} = \cancel{4\pi} \cdot 8^2 \cdot R'(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 64 \cdot R'(t_0) \Rightarrow \boxed{R'(t_0) = \frac{1}{64}}$$

17.19 4)

Έστω $V(t)$, $E(t)$, $R(t)$, ο όγκος η επιφάνεια και η ακτίνα του μπαλονιού. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$	α) $R'(t_0) = ;$
$E(t) = 4\pi R^2(t)$	β) $E'(t_0) = ;$
$V'(t_0) = -16\pi$	
$R(t_0) = 2$	

Οπότε

$$\alpha) \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t) R'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) R'(t) \xrightarrow{t=t_0} V'(t_0) = 4\pi R^2(t_0) R'(t_0) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{V'(t_0)=-16\pi, R(t_0)=2} \Rightarrow -16\cancel{\pi} = 4\cancel{\pi} \cdot 2^2 \cdot R'(t_0) \Rightarrow -16 = 16 \cdot R'(t_0) \Rightarrow \boxed{R'(t_0) = -1}$$

$$\beta) \quad E(t) = 4\pi R^2(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} E'(t) = 8\pi R(t) R'(t)$$

$$\xrightarrow{t=t_0} \Rightarrow E'(t_0) = 8\pi R(t_0) R'(t_0) \xrightarrow{R(t_0)=2, R'(t_0)=-1} E'(t_0) = 8\pi \cdot 2 \cdot (-1) \Rightarrow \boxed{E'(t_0) = -16\pi}$$

17.19 5)

Έστω $V(t)$, $E(t)$, $R(t)$, ο όγκος η επιφάνεια και η ακτίνα του μπαλονιού. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$	α) $R(t_1) = 5$
$E(t) = 4\pi R^2(t)$	$E'(t_1) = ;$
$V'(t) = 10\pi$	β) $E'(t_2) = 2$
	$R(t_2) = ;$

Οπότε

$$\alpha) \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t) R'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) R'(t) \xrightarrow{t=t_1} V'(t_1) = 4\pi R^2(t_1) R'(t_1) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{V'(t_1)=10\pi, R(t_1)=5} \Rightarrow 10\cancel{\pi} = 4\cancel{\pi} \cdot 5^2 \cdot R'(t_1) \Rightarrow 10 = 100 \cdot R'(t_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R'(t_1) = \frac{1}{\cancel{100}} \Rightarrow \boxed{R'(t_1) = \frac{1}{10}}$$

Επομένως

$$E(t) = 4\pi R^2(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} E'(t) = 8\pi R(t) R'(t) \xRightarrow{t=t_1} E'(t_1) = 8\pi R(t_1) R'(t_1) \Rightarrow$$

$$R(t_1)=5, R'(t_1)=\frac{5}{8} \Rightarrow E'(t_1) = 8\pi \cdot 5 \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow E'(t_1) = \frac{\cancel{40}\pi}{\cancel{10}} \Rightarrow \boxed{E'(t_1) = 4\pi}$$

β) $E(t) = 4\pi R^2(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} E'(t) = 8\pi R(t) R'(t)$

$$\xRightarrow{t=t_2} E'(t_2) = 8\pi R(t_2) R'(t_2) \xRightarrow{E'(t_2)=2} \cancel{2} = \cancel{8} \pi R(t_2) R'(t_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi R(t_2) R'(t_2) = 1 \quad (1)$$

Ακόμη

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t) R'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) R'(t) \xRightarrow{t=t_2} V'(t_2) = 4\pi R^2(t_2) R'(t_2) \xRightarrow{V'(t_2)=10}$$

$$\Rightarrow \cancel{10} = \cancel{4} \pi R^2(t_2) R'(t_2) \Rightarrow 2\pi R^2(t_2) R'(t_2) = 5 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\cancel{4} \pi \cancel{R(t_2)} \cancel{R'(t_2)}}{\cancel{2} \pi \cancel{R^2(t_2)} \cancel{R'(t_2)}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2}{R(t_2)} = \frac{1}{5} \Rightarrow R(t_2) = 2 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{R(t_2) = 10}$$

17.19 6)

Έστω $V(t)$, $E(t)$, $R(t)$, ο όγκος η επιφάνεια και η ακτίνα του μπαλονιού. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$	α) $R(t_1) = 6$
$E(t) = 4\pi R^2(t)$	$E'(t_1) = ;$
$V'(t) = -100\pi$	β) $E'(t_2) = -20\pi$
	$R(t_2) = ;$

Οπότε

α) $V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t) R'(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) R'(t) \xRightarrow{t=t_1} V'(t_1) = 4\pi R^2(t_1) R'(t_1) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{V'(t_1)=-100\pi, R(t_1)=6} -\cancel{100} \pi = \cancel{4} \pi \cdot 6^2 \cdot R'(t_1) \Rightarrow -25 = 36 \cdot R'(t_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R'(t_1) = -\frac{25}{36}}$$

Επομένως

$$E(t) = 4\pi R^2(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} E'(t) = 8\pi R(t)R'(t) \xRightarrow{t=t_1} E'(t_1) = 8\pi R(t_1)R'(t_1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} R(t_1)=6, R'(t_1)=-\frac{25}{36} \\ \Rightarrow E'(t_1) = 8\pi \cdot \cancel{6} \cdot \left(-\frac{25}{\cancel{36}} \right) \Rightarrow E'(t_1) = -\frac{100}{\cancel{200}} \pi \Rightarrow \boxed{E'(t_1) = -\frac{100\pi}{3}} \end{aligned}$$

β)

$$E(t) = 4\pi R^2(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} E'(t) = 8\pi R(t)R'(t)$$

$$\xRightarrow{t=t_2} E'(t_2) = 8\pi R(t_2)R'(t_2) \xRightarrow{E'(t_2)=-20\pi} \cancel{20} \pi = \cancel{8} \pi R(t_2)R'(t_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R(t_2)R'(t_2) = -5 \quad (1)$$

Ακόμη

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cancel{3} R^2(t)R'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t)R'(t) \xRightarrow{t=t_2} V'(t_2) = 4\pi R^2(t_2)R'(t_2) \xRightarrow{V'(t_2)=-100\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{100} \pi = \cancel{4} \pi R^2(t_2)R'(t_2) \Rightarrow R^2(t_2)R'(t_2) = -25 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\cancel{2} R(\cancel{t_2}) \cancel{R'(t_2)}}{\cancel{R^2(t_2)} \cancel{R'(t_2)}} = \frac{-5}{-25} \Rightarrow \frac{2}{R(t_2)} = \frac{1}{5} \Rightarrow R(t_2) = 2 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{R(t_2) = 10}$$