

17.17 1)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$y(t) = 2x^2(t) + 3x(t)$ $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ $y'(t_0) = 7x'(t_0)$	$(x(t_0), y(t_0)) = ;$

Οπότε

$$\begin{aligned}
 y(t) = 2x^2(t) + 3x(t) &\xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} y'(t) = 4x(t)x'(t) + 3x'(t) \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} \\
 \Rightarrow y'(t_0) = 4x(t_0)x'(t_0) + 3x'(t_0) &\xrightarrow{y'(t_0)=7x'(t_0)} 7x'(t_0) = 4x(t_0)x'(t_0) + 3x'(t_0) \Rightarrow \\
 \Rightarrow 7x'(t_0) = x'(t_0)[4x(t_0) + 3] &\xrightarrow{\begin{smallmatrix} x'(t_0) \neq 0 \\ \text{διότι αν } x'(t_0)=0 \Rightarrow y'(t_0)=0 \\ \text{τότε όμως το σημείο θα ήταν ακίνητο } \textcolor{red}{\text{άτοπο}} \end{smallmatrix}} 4x(t_0) + 3 = 7 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4x(t_0) = 4 \Rightarrow \boxed{x(t_0) = 1}
 \end{aligned}$$

Τέλος είναι

$$\begin{aligned}
 y(t) = 2x^2(t) + 3x(t) &\xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} y(t_0) = 2x^2(t_0) + 3x(t_0) \xrightarrow{x(t_0)=1} \\
 \Rightarrow y(t_0) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 &\Rightarrow \boxed{y(t_0) = 5}
 \end{aligned}$$

Επομένως το σημείο της παραβολής στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y είναι 7πλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης είναι το $A(1, 5)$

17.17 2)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Τότε τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης θα είναι

Δεδομένα	Ζητούμενα
$y(t) = \frac{x^2(t)}{8}$ $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ $y'(t_0) = x'(t_0)$	$(x(t_0), y(t_0)) = ;$

Οπότε

$$\begin{aligned}
 y(t) = \frac{1}{8}x^2(t) &\xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} y'(t) = \frac{1}{4}x(t)x'(t) \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} \\
 \Rightarrow 4y'(t_0) = x(t_0)x'(t_0) &\xrightarrow{y'(t_0)=x'(t_0)} 4x'(t_0) = x(t_0)x'(t_0) \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4x'(t_0) = x'(t_0)x(t_0) &\xrightarrow{\begin{smallmatrix} x'(t_0) \neq 0 \\ \text{διότι αν } x'(t_0)=0 \Rightarrow y'(t_0)=0 \\ \text{τότε όμως το σημείο θα ήταν ακίνητο } \textcolor{red}{\text{άτοπο}} \end{smallmatrix}} x(t_0) = 4
 \end{aligned}$$

Τέλος είναι

$$y(t) = \frac{1}{8}x^2(t) \xRightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} y(t_0) = \frac{1}{8}x^2(t_0) \xRightarrow{x(t_0)=4} y(t_0) = \frac{1}{8}4^2 \Rightarrow y(t_0) = 2$$

Επομένως το σημείο της παραβολής στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y είναι ίσος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης είναι το $A(4,2)$

17.17 3)

Έστω $M(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$y(t) = x^2(t) + 3x(t) + 5$ $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ $y'(t_0) = 3x'(t_0)$	$(x(t_0), y(t_0)) = ;$

Οπότε

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x^2(t) + 3x(t) + 5 \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} y'(t) = 2x(t)x'(t) + 3x'(t) \xRightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} \\
 &\Rightarrow y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) + 3x'(t_0) \xRightarrow{y'(t_0)=3x'(t_0)} 3x'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) + 3x'(t_0) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 3x'(t_0) = x'(t_0)[2x(t_0) + 3] \xRightarrow{\substack{x'(t_0) \neq 0 \\ \text{διότι αν } x'(t_0)=0 \Rightarrow y'(t_0)=0 \\ \text{τότε όμως το σημείο θα ήταν ακίνητο άτοπο}}} 2x(t_0) + 3 = 3 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2x(t_0) = 0 \Rightarrow \boxed{x(t_0) = 0}
 \end{aligned}$$

Τέλος είναι

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x^2(t) + 3x(t) + 5 \xRightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} y(t_0) = x^2(t_0) + 3x(t_0) + 5 \xRightarrow{x(t_0)=0} \\
 &\Rightarrow y(t_0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 5 \Rightarrow \boxed{y(t_0) = 5}
 \end{aligned}$$

Επομένως το σημείο της παραβολής στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y είναι 3πλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης είναι το $A(0,5)$

17.17 4)

Είναι

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} y'(x) = 2\alpha x + \beta \quad (1)$$

$$z(x) = \beta x^2 + \alpha x + \gamma \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} z'(x) = 2\beta x + \alpha \quad (2)$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= z'(x) \xRightarrow{(1),(2)} 2\alpha x + \beta = 2\beta x + \alpha \Rightarrow 2\alpha x - 2\beta x = \alpha - \beta \Rightarrow (2\alpha - 2\beta)x = \alpha - \beta \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2(\alpha - \beta)x = \alpha - \beta \Rightarrow x = \frac{\cancel{\alpha} - \beta}{2(\cancel{\alpha} - \beta)} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$