

## 16.4 1)

Η εφαπτόμενη που σχηματίζει γωνία  $\frac{\pi}{3}$  με τον άξονα  $x'x$ , θα πρέπει να έχει

συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{\epsilon\phi} = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ . Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο

$(x_0, f(x_0))$  θα είναι  $f'(x_0) = \sqrt{3}$

Όμως  $f'(x) = 2x$

Οπότε

$$f'(x_0) = \sqrt{3} \Rightarrow 2x_0 = \sqrt{3} \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα οι ζητούμενη εφαπτόμενη, εφάπτεται στο σημείο  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)}$

## 16.4 2)

Η εφαπτόμενη που σχηματίζει γωνία  $\frac{3\pi}{4}$  με τον άξονα  $x'x$ , θα πρέπει να έχει

συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{\epsilon\phi} = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} = -1$ . Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο

$(x_0, f(x_0))$  θα είναι  $f'(x_0) = -1$

Όμως  $f'(x) = -4x + 5$

Οπότε

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow -4x_0 + 5 = -1 \Rightarrow -4x_0 = -6 \Rightarrow x_0 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Άρα οι ζητούμενη εφαπτόμενη, εφάπτεται στο σημείο  $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$\begin{aligned} y - f\left(\frac{3}{2}\right) &= f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \begin{matrix} f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5\frac{3}{2} - 1 = 2 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1 \end{matrix} \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y - 2 = -x + \frac{3}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2y - 4 = -2x + 3 \Rightarrow \boxed{2x + 2y - 7 = 0} \end{aligned}$$

## 16.4 3)

Η εφαπτόμενη που σχηματίζει γωνία  $\frac{\pi}{4}$  με τον άξονα  $x'x$ , θα πρέπει να έχει

συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{\epsilon\phi} = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$ . Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$

θα είναι  $f'(x_0) = 1$

Όμως  $f'(x) = 2x - 3$

Οπότε

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 - 3 = 1 \Rightarrow 2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2$$

Άρα οι ζητούμενη εφαπτόμενη , εφάπτεται στο σημείο  $(2, f(2))$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \begin{matrix} f(2)=2^2-3\cdot 2-1=-3 \\ f'(2)=1 \end{matrix} \Rightarrow y + 3 = 1 \cdot (x - 2) \Rightarrow \boxed{y = x - 5}$$

### 16.4 4)

Η εφαπτόμενη που σχηματίζει γωνία  $\frac{\pi}{6}$  με τον άξονα  $x'x$  , θα πρέπει να έχει

συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{\epsilon\varphi} = \epsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  . Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο

$(x_0, f(x_0))$  θα είναι  $f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Όμως } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Οπότε

$$f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sqrt{3}\sqrt{x_0} = 3 \Rightarrow 3x_0 = 9 \Rightarrow x_0 = 3$$

Άρα οι ζητούμενη εφαπτόμενη , εφάπτεται στο σημείο  $(3, f(3)) = \boxed{(3, 2\sqrt{3})}$

### 16.4 5)

Η εφαπτόμενη που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  , θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 0 , δηλαδή  $\lambda_{\epsilon\varphi} = 0$  . Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$

θα είναι  $f'(x_0) = 0$

$$\text{Όμως } f'(x) = 12x^3 - 12x$$

Οπότε

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 12x_0^3 - 12x_0 = 0 \Rightarrow 12x_0(x_0^2 - 1) = 0 \Rightarrow 12x_0(x_0 - 1)(x_0 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες , εφάπτονται στα σημεία

$$(0, f(0)) = \boxed{(0, 5)} \quad , \quad (1, f(1)) = \boxed{(1, 2)} \quad \text{και} \quad (-1, f(-1)) = \boxed{(-1, 2)}$$

### 16.4 6)

Η εφαπτόμενη που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  , θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 0 , δηλαδή  $\lambda_{\epsilon\varphi} = 0$  . Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$

θα είναι  $f'(x_0) = 0$

$$\text{Όμως } f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 12(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

Οπότε

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^3 - 2x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0 \quad \begin{matrix} \text{παραγοντοποίηση} \\ \text{με Horner} \end{matrix} \Rightarrow (x_0 - 1)(x_0 + 2)(x_0 - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -2 \text{ ή } x_0 = 3$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες , εφάπτονται στα σημεία

$$(1, f(1)) = \boxed{(1, 25)} \quad , \quad (-2, f(-2)) = \boxed{(-2, -164)} \quad \text{και} \quad (3, f(3)) = \boxed{(3, -39)}$$

Η εφαπτόμενη που είναι οριζόντια , θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 0 , δηλαδή  $\lambda_{\text{εφ}} = 0$  . Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο  $(x_o, f(x_o))$  θα είναι  $f'(x_o) = 0$

$$\text{Όμως } f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3)$$

Οπότε

$$f'(x_o) = 0 \Rightarrow x_o^2 - 4x_o + 3 = 0 \quad x_o = 1 \quad \text{ή} \quad x_o = 3$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες , εφάπτονται στα σημεία  $(1, f(1))$  και  $(3, f(3))$

οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y = f(1) \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

και

$$y = f(3) \Rightarrow \boxed{y = -4}$$