

16.3 1)

Η ευθεία $y = -\frac{1}{3}x - 5$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{1}{3}$ άρα οι εφαπτόμενες που ζητούνται θα πρέπει να έχουν αντιθετοαντίστροφο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = 3$. Οπότε αν εφάπτονται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0) = 3$

$$\text{Όμως } f'(x) = 3x^2 + 6x - 6$$

Οπότε

$$f'(x_0) = 3 \Rightarrow 3x_0^2 + 6x_0 - 6 = 3 \Rightarrow 3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 0 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = 1 \\ x_{02} = -3 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες, εφάπτονται στα σημεία $(1, f(1))$ και $(-3, f(-3))$

οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \begin{matrix} f(1)=-1, f'(1)=3 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 3x - 4}$$

και

$$y - f(-3) = f'(-3)(x + 3) \quad \begin{matrix} f(-3)=19, f'(-3)=3 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad y - 19 = 3(x + 3) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 28}$$

16.3 2)

Η ευθεία $y = 6x + 1$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 6$ άρα η εφαπτόμενη που είναι παράλληλη σε αυτή την ευθεία, θα πρέπει να έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = 6$. Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0) = 6$

$$\text{Όμως } f'(x) = 2x - 2$$

Οπότε

$$f'(x_0) = 6 \Rightarrow 2x_0 - 2 = 6 \Rightarrow 2x_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 4$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη, εφάπτεται στο σημείο $(4, f(4)) = \boxed{(4, 13)}$

16.3 3)

Η ευθεία $2x - 8y + 3 = 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-8} = \frac{1}{4}$ άρα η εφαπτόμενη που είναι παράλληλη σε αυτή την ευθεία, θα πρέπει να έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = \frac{1}{4}$. Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο

$$(x_0, f(x_0)) \text{ θα είναι } f'(x_0) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Όμως } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Οπότε

$$f'(x_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x_0} = 2 \Rightarrow x_0 = 4$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη , εφάπτεται στο σημείο $(4, f(4)) = \boxed{(4, 2)}$

16.3 4)

Η ευθεία $x - 2y + 7 = 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ άρα η εφαπτόμενη που είναι κάθετη σε αυτή την ευθεία , θα πρέπει να έχει αντιθετοαντίστροφο συντελεστή διεύθυνσης , δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = -2$. Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0) = -2$

$$\text{Όμως } f'(x) = 2x + 2$$

Οπότε

$$f'(x_0) = -2 \Rightarrow 2x_0 + 2 = -2 \Rightarrow 2x_0 = -4 \Rightarrow x_0 = -2$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη , εφάπτεται στο σημείο $(-2, f(-2)) = \boxed{(-2, -1)}$

16.3 5)

Η ευθεία $2x - 8y - 3 = 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-8} = \frac{1}{4}$ άρα η εφαπτόμενη που είναι κάθετη σε αυτή την ευθεία , θα πρέπει να έχει αντιθετοαντίστροφο συντελεστή διεύθυνσης , δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = -4$. Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0) = -4$

$$\text{Όμως } f'(x) = e^x - 5$$

Οπότε

$$f'(x_0) = -4 \Rightarrow e^{x_0} - 5 = -4 \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow e^{x_0} = e^0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη , εφάπτεται στο σημείο $(0, f(0)) = \boxed{(0, 1)}$

16.3 6)

Η ευθεία $y = 4x - 1$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 4$ άρα η εφαπτόμενη που είναι παράλληλη σε αυτή την ευθεία , θα πρέπει να έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης , δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = 4$. Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0) = 4$

$$\text{Όμως } f'(x) = 2x + 2$$

Οπότε

$$f'(x_0) = 4 \Rightarrow 2x_0 + 2 = 4 \Rightarrow 2x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη , εφάπτεται στο σημείο $(1, f(1))$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \begin{matrix} f(1)=1^2+2\cdot 1-1=2 \\ f'(1)=4 \end{matrix} \Rightarrow y - 2 = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 4x - 2}$$

16.3 7)

Η ευθεία $y = 12x + 15$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 12$ άρα η εφαπτόμενη που είναι παράλληλη σε αυτή την ευθεία , θα πρέπει να έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης , δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = 12$. Οπότε αν εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0) = 12$

$$\text{Όμως } f'(x) = 6x - 6$$

Οπότε

$$f'(x_0) = 12 \Rightarrow 6x_0 - 6 = 12 \Rightarrow 6x_0 = 18 \Rightarrow x_0 = 3$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη, εφάπτεται στο σημείο $(3, f(3))$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$\begin{aligned} y - f(3) &= f'(3)(x - 3) \quad \begin{matrix} f(3)=3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 2 = 11 \\ f'(3)=12 \end{matrix} \Rightarrow y - 11 = 12 \cdot (x - 3) \Rightarrow y - 11 = 12x - 36 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{y = 12x - 25} \end{aligned}$$

16.3 8)

Η ευθεία $x + 4y + 2 = 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{4}$ άρα οι

εφαπτόμενες που ζητούνται θα πρέπει να έχουν αντιθετοαντίστροφο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\lambda_{\text{εφ}} = 4$. Οπότε αν εφάπτονται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0) = 4$

$$\text{Όμως } f'(x) = 6x^2 - 6x - 8$$

Οπότε

$$f'(x_0) = 4 \Rightarrow f'(x) = 6x_0^2 - 6x_0 - 8 = 4 \Rightarrow 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = -1 \\ x_{02} = 2 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες, εφάπτονται στα σημεία $(-1, f(-1))$ και $(2, f(2))$

οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad \begin{matrix} f(-1)=4, f'(-1)=4 \end{matrix} \Rightarrow y - 4 = 4(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 4x + 8}$$

και

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \begin{matrix} f(2)=-11, f'(2)=4 \end{matrix} \Rightarrow y + 11 = 4(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 4x - 19}$$