

16.19

Κατ' αρχήν $f'(x) = 2x - 2$ και $g(x) = -2x$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad \begin{matrix} f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 2 \\ f'(x_1) = 2x_1 - 2 \end{matrix} \Rightarrow y - x_1^2 + 2x_1 - 2 = (2x_1 - 2)(x - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - x_1^2 + \cancel{2x_1} - 2 = 2x_1x - 2x_1^2 - 2x + \cancel{2x_1} \Rightarrow \boxed{y = (2x_1 - 2)x - x_1^2 + 2} \quad (1)$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $M(x_2, g(x_2))$ έχει εξίσωση

$$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \quad \begin{matrix} g(x_2) = -x_2^2 + 1 \\ g'(x_2) = -2x_2 \end{matrix} \Rightarrow y + x_2^2 - 1 = -2x_2(x - x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + x_2^2 - 1 = -2x_2x + 2x_2^2 \Rightarrow \boxed{y = -2x_2x + x_2^2 + 1} \quad (2)$$

Για να έχουμε κοινή εφαπτόμενη θα πρέπει να ταυτίζονται οι εξισώσεις (1) και (2). Αυτό θα ισχύει όταν

$$\begin{cases} 2x_1 - 2 = -2x_2 \\ \text{και} \\ -x_1^2 + 2 = x_2^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ -(-x_2 + 1)^2 + 2 = x_2^2 + 1 \Rightarrow -x_2^2 + 2x_2 - 1 + 2 = x_2^2 + 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ -2x_2^2 + 2x_2 = 0 \Rightarrow -2x_2(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ ή } x_2 = 1 \end{cases}$$

Για $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ και η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$y = -2x_2x + x_2^2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Για $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ και η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$y = -2x_2x + x_2^2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 2}$$