

16.18 1)

Καταρχήν είναι $f'(x) = 2x - 1$ και $g'(x) = \ln x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Ακόμη

Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα κοινό τους σημείο A θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

- α) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f
- β) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της g
- γ) ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\alpha)$) να ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g στο A (δηλαδή $g'(\alpha)$)

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\alpha) = \beta \\ A \in C_g \Rightarrow g(\alpha) = \beta \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \alpha = \beta & (1) \\ \alpha \ln \alpha = \beta & (2) \\ 2\alpha - 1 = \ln \alpha + 1 & (3) \end{cases}$$

Θα πρέπει να βρούμε τα α και β ώστε να επαληθεύονται και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις

$$(2) \Rightarrow \ln \alpha = \frac{\beta}{\alpha} \xrightarrow{(1)} \ln \alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha} \Rightarrow \ln \alpha = \frac{\cancel{\alpha}(\alpha - 1)}{\cancel{\alpha}} \Rightarrow \ln \alpha = \alpha - 1 \quad (4)$$

$$(3) \xrightarrow{(4)} 2\alpha - 1 = \alpha - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Αν $\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ παρατηρούμε ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη και μάλιστα στο σημείο $A(1, 0)$

16.18 2)

Καταρχήν είναι $f'(x) = 2x - 2$ και

$$g'(x) = \frac{2x^2 - (2x - 1)2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-2x + 2}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

Ακόμη

Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα κοινό τους σημείο A θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$, $\alpha \neq 0$, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

- α) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f
- β) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της g
- γ) ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\alpha)$) να ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g στο A (δηλαδή $g'(\alpha)$)

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\alpha) = \beta \\ A \in C_g \Rightarrow g(\alpha) = \beta \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 2 = \beta & (1) \\ \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2} = \beta & (2) \\ 2\alpha - 2 = \frac{-2\alpha + 2}{\alpha^3} & (3) \end{cases}$$

Θα πρέπει να βρούμε τα α και β ώστε να επαληθεύονται και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις

$$(3) \Rightarrow 2\alpha^4 - 2\alpha^3 = -2\alpha + 2 \Rightarrow 2\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^4 - \alpha^3 + \alpha - 1 = 0 \quad \begin{matrix} \text{παραγοντοποίηση με Horner} \\ \text{ρίζα } x=1 \end{matrix} \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{ή} \quad \alpha = -1$$

$$\text{Αν } \alpha = -1 \text{ τότε } \begin{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \beta = 5 \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \beta = -3 \end{cases} \quad \text{και άρα δεν επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις}$$

Αν $\boxed{\alpha = 1} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\beta = 1}$. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ παρατηρούμε ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη και μάλιστα στο σημείο $A(1, 1)$

16.18 3)

Καταρχήν αν $f(x) = \alpha x - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x + \alpha$ και

$$g(x) = x^2 + \alpha - 2 \Rightarrow g'(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ακόμη

Για να εφάπτονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g πρέπει να έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα κοινό τους σημείο. Δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\beta, \gamma)$, $\alpha \neq 0$, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

- το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f
- το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της g
- ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\beta)$) να ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g στο A (δηλαδή $g'(\beta)$)

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\beta) = \gamma \\ A \in C_g \Rightarrow g(\beta) = \gamma \\ f'(\beta) = g'(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta - \beta^2 = \gamma & (1) \\ \beta^2 + \alpha - 2 = \gamma & (2) \\ -2\beta + \alpha = 2\beta & (3) \end{cases}$$

Θα πρέπει να βρούμε τα α και β ώστε να επαληθεύονται και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις

$$(3) \Rightarrow \alpha = 4\beta \quad (4)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \alpha\beta - \beta^2 = \beta^2 + \alpha - 2 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} 4\beta^2 - \beta^2 = \beta^2 + 4\beta - 2 \Rightarrow 2\beta^2 - 4\beta + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \Rightarrow (\beta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

Αν $\boxed{\beta=1} \overset{(4)}{\Rightarrow} \boxed{\alpha=4} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\gamma=3}$. Για $\alpha=4$, $\beta=1$ και $\gamma=3$ παρατηρούμε ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη και μάλιστα στο σημείο $A(1,3)$