

16.17 1)

Καταρχήν είναι $f'(x) = 2x + e^{x-1}$

Ακόμη

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y = 3x - 1$ στην γραφική παράσταση της f , θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

- α) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f
- β) το A να ανήκει στην ευθεία ε
- γ) ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\alpha)$) να ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε (δηλαδή με 3)

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\alpha) = \beta \\ A \in \varepsilon \Rightarrow \beta = 3\alpha - 1 \\ f'(\alpha) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + e^{\alpha-1} = \beta & (1) \\ \beta = 3\alpha - 1 & (2) \\ 2\alpha + e^{\alpha-1} = 3 \Rightarrow e^{\alpha-1} = 3 - 2\alpha & (3) \end{cases}$$

Θα πρέπει να βρούμε τα α και β ώστε να επαληθεύονται και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις

Έχουμε

$$(1) \xrightarrow{(2),(3)} \alpha^2 + 3 - 2\alpha = 3\alpha - 1 \Rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0 \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Αν $\alpha = 4 \xrightarrow{(2)} \beta = 11$. Όμως για $\alpha = 4$ και $\beta = 11$ παρατηρούμε ότι η εξίσωση (1) δεν επαληθεύεται άρα η λύση αυτή απορρίπτεται

Αν $\alpha = 1 \xrightarrow{(2)} \beta = 2$. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ παρατηρούμε ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις άρα η ευθεία ε εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f και μάλιστα στο σημείο $A(1, 2)$

16.17 2)

Καταρχήν είναι $f'(x) = 2x \ln x + x$, $x > 0$

Ακόμη

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ στην γραφική παράσταση της f , θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

- α) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f
- β) το A να ανήκει στην ευθεία ε
- γ) ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\alpha)$) να ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε (δηλαδή με 1)

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\alpha) = \beta \\ A \in \varepsilon \Rightarrow \beta = \alpha - 1 \\ f'(\alpha) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 \ln \alpha = \beta & (1) \\ \beta = \alpha - 1 & (2) \\ 2\alpha \ln \alpha + \alpha = 1 & (3) \end{cases}$$

Θα πρέπει να βρούμε τα α και β ώστε να επαληθεύονται και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις

Έχουμε

$$(1) \xrightarrow{\alpha > 0} \ln \alpha = \frac{\beta}{\alpha^2} \xrightarrow{(2)} \ln \alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \quad (4)$$

$$(3) \xrightarrow{(4)} 2 \cancel{\alpha} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} + \alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha - 2 + \alpha^2 = \alpha \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

$$\Delta = 9, \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \text{ απορρίπτεται διότι } \alpha > 0$$

Αν $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 0$. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ παρατηρούμε ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις άρα η ευθεία ε εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f και μάλιστα στο σημείο $A(1, 0)$

16.17 3)

Καταρχήν είναι $f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{e}}}{e}, x \in \mathbb{R}$

Ακόμη

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y = x$ στην γραφική παράσταση της f , θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

- α) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f
- β) το A να ανήκει στην ευθεία ε
- γ) ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\alpha)$) να ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε (δηλαδή με 1)

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\alpha) = \beta \\ A \in \varepsilon \Rightarrow \beta = \alpha \\ f'(\alpha) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{\alpha}{e}} = \beta & (1) \\ \beta = \alpha & (2) \end{cases}$$
$$\frac{e^{\frac{\alpha}{e}}}{e} = 1 \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{e}} = e \Rightarrow \frac{\alpha}{e} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = e}$$

Θα πρέπει να βρούμε τα α και β ώστε να επαληθεύονται και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις

Αν $\alpha = e \Rightarrow \boxed{\beta = e}$. Για $\alpha = e$ και $\beta = e$ παρατηρούμε ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις άρα η ευθεία ε εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f και μάλιστα στο σημείο $A(e, e)$

16.17 4)

Καταρχήν είναι $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha, x \in \mathbb{R}$

Ακόμη

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y = x$ στην γραφική παράσταση της f , θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\beta, \gamma)$, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

- α) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f
- β) το A να ανήκει στην ευθεία ε
- γ) ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\beta)$) να ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε (δηλαδή με 1)

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\beta) = \gamma \\ A \in \varepsilon \Rightarrow \gamma = \beta \\ f'(\beta) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^\beta = \gamma & (1) \\ \gamma = \beta & (2) \\ \alpha^\beta \ln \alpha = 1 & (3) \end{cases}$$

Θα πρέπει να βρούμε τα α και β ώστε να επαληθεύονται και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις

$$(1), (2) \Rightarrow \alpha^\beta = \beta \Rightarrow \ln \alpha^\beta = \ln \beta \Rightarrow \beta \ln \alpha = \ln \beta \quad (4)$$

$$\text{Ακόμη } (3) \stackrel{(1), (2) \Rightarrow \alpha^\beta = \beta}{\Rightarrow} \beta \ln \alpha = 1 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \ln \beta = 1 \Rightarrow \beta = e$$

$$\text{Αν } \beta = e \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \gamma = e \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \alpha^e = e \Rightarrow \ln \alpha^e = \ln e \Rightarrow e \ln \alpha = 1 \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{\alpha = e^{\frac{1}{e}}}. \text{ Για } \alpha = e^{\frac{1}{e}},$$

$\beta = e$ και $\gamma = e$ παρατηρούμε ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις άρα η ευθεία εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f και μάλιστα στο σημείο $A(e, e)$

16.17 5)

Καταρχήν είναι $f'(x) = e^x - \alpha$, $x \in \mathbb{R}$

Ακόμη

Για να εφάπτεται η γραφική παράσταση της f στον άξονα $x'x$, θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $A(\beta, 0)$, του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

α) το A να ανήκει στην γραφική παράσταση της f

β) ο συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f στο A (δηλαδή $f'(\beta)$) να ισούται με 0

δηλαδή

$$\begin{cases} A \in C_f \Rightarrow f(\beta) = 0 \\ f'(\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^\beta - \alpha\beta = 0 & (1) \\ e^\beta - \alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow e^\beta = \alpha \quad (4)$$

$$(1) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \alpha - \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha(1 - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 1$$

$$\text{Αν } \alpha = 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} e^\beta = 0 \text{ αδύνατη}$$

$$\text{Αν } \beta = 1 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \boxed{\alpha = e}$$